1 Formalisieren

Einen Begriff formalisieren bedeutet die intuitive Vorstellung desselben durch eine mathematische Formel zu spezifizieren, wobei diese Formalisierung innerhalb einer "wissenschaftlichen" Community (Gemeinde) akzeptiert werden muß.
Die Formalisierung muß die intuitive Vorstellung (ohne Lücke) widerspiegeln (übersetzen, abbilden) und umgekehrt, d.h. Formalisierung und Intuition müssen korrespondieren.
Widerspricht die Formalisierung der intuitiven Vorstellung (und kompromittiert diese), so nennt man dies eine kontraintuitive Formalisierung, die daraufhin von der Community abgelehnt wird.

1.1 Beispiele

1.1.1 Beispiel 1

Der Begriff der Note (Benotung, Notengebung) einer Klassenarbeit soll formalisiert werden durch:
note = -0,05 * prozentpunkte + 6
Beispiel:
100 % der erreichten Punkte ---> Note: 1
50 % der erreichten Punkte ---> Note: 3,5
0 % der erreichten Punkte ---> Note: 6

Diese Formalisierung wird vermutlich von vielen Menschen akzeptiert, weil jeder Prozentpunkt weniger (von der Note 1 ausgehend), die Note um den gleichen Wert (0,05) schlechter werden läßt.
Diese Formalisierung bildet also die intuitive Vorstellung einer "gerechten" Notengebung vieler Mensche ab.
Angenommen, jeder Mensch bekommt die Note 1, egal wie viel Prozentpunkte er erreicht hat, dann bildet diese Formalisierung nicht die intuitive Vorstellung vieler Menschen von einer "gerechten" Notengebung ab. Sie ist deswegen kontraintuitiv.

1.1.2 Beispiel 2

Der Begriff des Flächeninhalts eines Rechtecks soll formalisiert werden durch:
Fläche = Länge / Breite
Demnach hat ein Rechteck der Länge 60 und Breite 20 den gleichen Flächeninhalt (nämlich 3) wie ein Rechteck der Länge 6 und Breite 2, weil 60 dividiert durch 20 das gleiche ergibt wie 6 durch 2.
Diese Formalisierung wird von vermutlich keinem Menschen akzeptiert, weil jeder Mensch intuitiv sagt, daß ein Rechteck der Länge 60 bzw. Breite 20 einen größeren Flächeninhalt hat als ein Rechteck der Länge 6 bzw. Breite 2.
Diese Formalisierung bildet also nicht die intuitive Vorstellung von Flächeninhalt ab, weil sie den Alltagserfahrungen aller Menschen widerspricht. Sie ist deswegen kontraintuitiv.

1.1.3 Beispiel 3

Der Begriff des Bußgelds bei einer Geschwindigkeitsübertretung soll formalisiert werden.

Idee 1:
Bis 10 km/h zu schnell: 10 Euro Strafe
Bis 20 km/h zu schnell: 20 Euro Strafe
Bis 30 km/h zu schnell: 30 Euro Strafe
usw.

Damit ist vermutlich nicht jeder einverstanden, denn da kommen die Schnellfahrer zu gut weg.

Idee 2:
Bis 10 km/h zu schnell: 10 Euro Strafe
Bis 20 km/h zu schnell: 60 Euro Strafe (3-fache)
Bis 30 km/h zu schnell: 120 Euro Strafe (4-fache)
Bis 40 km/h zu schnell: 200 Euro Strafe (5-fache)
....

Man könnte aber auch die Strafe von zulässigen Höchstgeschwindigkeit abhängig machen:

Idee 3:
Über bis zu 10% der zulässigen Höchstgeschwindigkeit zu schnell: 10 Euro
Über bis zu 20% der zulässigen Höchstgeschwindigkeit zu schnell: 20 Euro
Über bis zu 30% der zulässigen Höchstgeschwindigkeit zu schnell: 30 Euro
....
Würde bei einer zulässigen Höchstgeschwindigkeit von 100 km/h bedeuten:
Bis zu 110 km/h gefahren: 10 Euro Strafe
Bis zu 120 km/h gefahren: 20 Euro Strafe
Bis zu 130 km/h gefahren: 30 Euro Strafe
....
Würde bei einer zulässigen Höchstgeschwindigkeit von 200 km/h bedeuten:
Bis zu 220 km/h gefahren: 10 Euro Strafe
Bis zu 240 km/h gefahren: 20 Euro Strafe
Bis zu 260 km/h gefahren: 30 Euro Strafe
....
Das würde wiederum die Raser begünstigen.

Idee 4:
aktuelle Bußgeldkatalog im Internet

Ergebnis:
Man wird wohl sehr schwer eine Regelung finden, mit der alle Menschen einverstanden sind.

1.1.4 Beispiel 4

Der Begriff des Flächeninhalts eines Rechtecks soll formalisiert werden durch:
A = Länge * Breite
und von allen Menschen akzeptiert werden.
Diese Formalisierung wird von vermutlich allen Menschen akzeptiert, vor allem weil bis jetzt noch kein kontraintuitives Gegenbeispiel gefunden wurde.
Allerdings ist es nicht ausgeschlossen, daß irgendwann jemand ein (kontraintuitives) Beispiel findet, wo alle Menschen sagen, daß diese Formel nicht die intuitive Vorstellung des Flächeninhalts widerspiegelt.
Bis jetzt glauben also alle Menschen, daß die obige Formel eine adäquate Formalisierung des Flächeninhaltsbegriffs ist.
Man kann dies nur "glauben" und auch nicht (inner) mathematisch, (d.h. innerhalb der Mathematik) "beweisen". Das Problem der Formalisierung eines Begriffs muß also außermathematisch in einer natürlichen Sprache wie z.B. Englisch formuliert und beschrieben werden.

1.1.5 Beispiel 5

Das Recht kodifizieren, d.h. durch ein Gesetzbuch festlegen.
Wenn ein Gesetzbuch die intuitive Rechtsvorstellung (das gefühlte Rechtsempfinden, die "Gerechtigkeit") durch das formalisierte Recht nicht widerspiegelt, dann wird dieses formalisierte Gesetz nicht von der Community (für die dieses Gesetz gelten soll) akzeptiert.
Wenn z.B. ein Banküberfall mit einer Ordnungsstrafe und Falschparken mit einer hohen Gefängnisstrafe geahndet wird, dann hat man eine kontraintuitive Formalisierung
("Die Großen läßt man laufen und die Kleinen hängt man auf").

1.1.6 Beispiel 6

Es soll ein Flächeninhaltsbegriff einer Fläche formalisiert werden, die durch eine Kurve, der x-Achse und zweier senkrechter Geraden begrenzt wird.
Entsprechende mathematische Überlegungen ergeben, daß ein Flächeninhalt nicht a priori existieren muß.

1.1.7 Beispiel 7

Im eindimensionalen Raum, der anschaulich durch eine Zahlengerade repräsentiert wird, wird die kleiner-Relation zwischen 2 Punkten durch die mit $<$ bezeichnete Relation formalisiert und von vermutlich fast allen Menschen der Industrienationen akzeptiert.

Im zweidimensionalen Raum wird man wohl in der Community keine allgemein akzeptierte Formalisierung der kleiner-Relation erwarten können, die 2 Punkte in der Ebene bzw. einer kleiner-Relation vergleicht.

1.1.8 Beispiel 8

In einem Spiel kann ein Spieler mehrere Pluspunkte bzw. Minuspunkte sammeln.
Wenn er dann mehrere Spiele (gegen verschiedene Spieler) gemacht hat, könnte z.B. das Verhältnis der Pluspunkte zu den Minuspunkten bei 2 Spielern wie folgt aussehen:
Spieler 1:
P : M = 20 : 4

Spieler 2:
P : M = 8 : 1

Welcher Spieler ist "besser" bzw. wie definiert man "besser" ?
Versuche einer Bewertung durch die Definition der "Kennzahl"

Definition1:
KennzahlQ = Pluspunkte / Minuspunkte

Definition2:
KennzahlD = Pluspunkte - Minuspunkte

Auf das obige Beispiel angewendet:

Spieler 1:
P : M = 20 : 4 KennzahlQ = 20 : 4 = 5 KennzahlD = 20 - 4 = 16

Spieler 2:
P : M = 8 : 1 KennzahlQ = 8 : 1 = 8 KennzahlD = 8 - 1 = 7

Je nachdem, welche Definition der Kennzahl man wählt, ist einmal Spieler1 bzw. Spieler 2 der "Bessere".
Welche Definition der Kennzahl (KennzahlQ oder KennzahlD) bildet unsere intuitive Vorstellung einer Kennzahl nun besser ab?
Das ist ein außermathematisches Problem, welche innerhalb der Mathematik nicht gelöst werden kann!
Vorschlag, dieses außermathematische Problem zu lösen:
Alle Mitglieder der Community sollen darüber abstimmen, welches das gerechtere Verfahren ist.
Welches Verfahren die meisten Stimmen bekommt, ist das "Gerechtere".
Die Ansicht, welches das gerechtere Verfahren ist kann sich dann im Lauf der Zeit ändern.

Dass dieses Beispiel nicht an den Haaren herbeigezogen bzw. konstruiert ist zeigt die Fußballbundesliga:
1)
In der Fußball-Bundesliga soll bei gleicher Punktezahl das Torverhältnis zwischen geschossenen und erhaltenen Toren berücksichtigt werden.
Vor 1968 war in allen Ligen des DFB der Quotient geschossene Tore : erhaltene Tore, nach 1968 die Differenz geschossene Tore - erhaltene Tore als Kennzahl maßgebend!

2)
Zur Saison 1995/96 wurde die Drei-Punkte-Regel eingeführt:
Ein Sieg wird mit drei Punkten bewertet, ein Unentschieden mit einem Punkt und eine Niederlage mit 0 Punkten.
Vorher galt die Zwei-Punkte-Regel:
Ein Sieg wird mit mit zwei Pluspunkten und keinem Minuspunkt bewertet, ein Unentschieden mit einem Plus- und einem Minuspunkt, eine Niederlage mit zwei Minuspunkten und keinem Pluspunkt.

1.1.9 Beispiel 9

Im Internet gibt es eine Website, bei der man freihändig einen Kreis auf den Bildschirm malen kann.
Die Website bewertet (als Prozentzahl), wie "nahe" man einem Kreis kommt, d.h. wie "rund" der eingezeichnete Kreis ist.
Für die Bewertung gibt es sicherlich verschiedene, intuitive Vorstellungen.

1.1.10 Beispiel 10

Bei einer Olympiade gibt es folgende Medaillenverteilung:

Land 1:	10 Gold,	2 Silber	1 Bronze
Land 2:	8 Gold,	20 Silber	10 Bronze

Welches Land ist erfolgreicher ?
Für die Bewertung gibt es sicherlich verschiedene, intuitive Vorstellungen.

1.1.11 Beispiel 11

Beim Zehnkampf werden verschiedene Disziplinen (Laufen, Hochsprung, Weitsprung, usw.)
Für die Bewertung gibt es sicherlich verschiedene, intuitive Vorstellungen.
Werden z.B. 100 m in 10 Sekunden intuitiv so gut bewertet wie 8,95 Meter im Weitsprung?

1.1.12 Beispiel 12 (Teilungsproblem)
Was ist gerecht? Dazu gibt es verschiedene Auffassungen.
siehe:
https://de.wikipedia.org/wiki/Teilungsproblem

1.2 Eindeutigkeit

Stellt man verschiedene Bedingungen an die Formalisierung eines Begriffs, so kann die Formalisierung eindeutig werden.

Beispiel:
Der Flächeninhalt eines Rechtecks mit den Seitenlängen 1 wird definert zu:
$A(1,1) := 1$

Ein Rechteck mit Breite $k\cdot x$ soll (bei gleicher Länge y) k - Mal so groß sein wie ein Rechteck mit Breite x und Länge y. Forderung formalisiert:
$A(k\cdot x , y) = k\cdot A(x , y)$

Ein Rechteck mit Länge $k\cdot y$ soll (bei gleicher Breite x) k - Mal so groß sein wie ein Rechteck mit Breite x und Länge y. Forderung formalisiert:
$A(x, k\cdot y) = k\cdot A(x , y)$

Also folgt für ein Rechteck der Breite x und Länge y:
$A(x, y) = A(x\cdot 1, y\cdot 1) = x\cdot A(1, y\cdot 1) = x \cdot y \cdot A(1,1) = x \cdot y \cdot 1 = x \cdot y$