

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

Beliebige Formelsammlungen, aber keine konkreten, gerechneten Beispiele.

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben. Wenn nötig, Zeichnung machen.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punktabzug !!!!

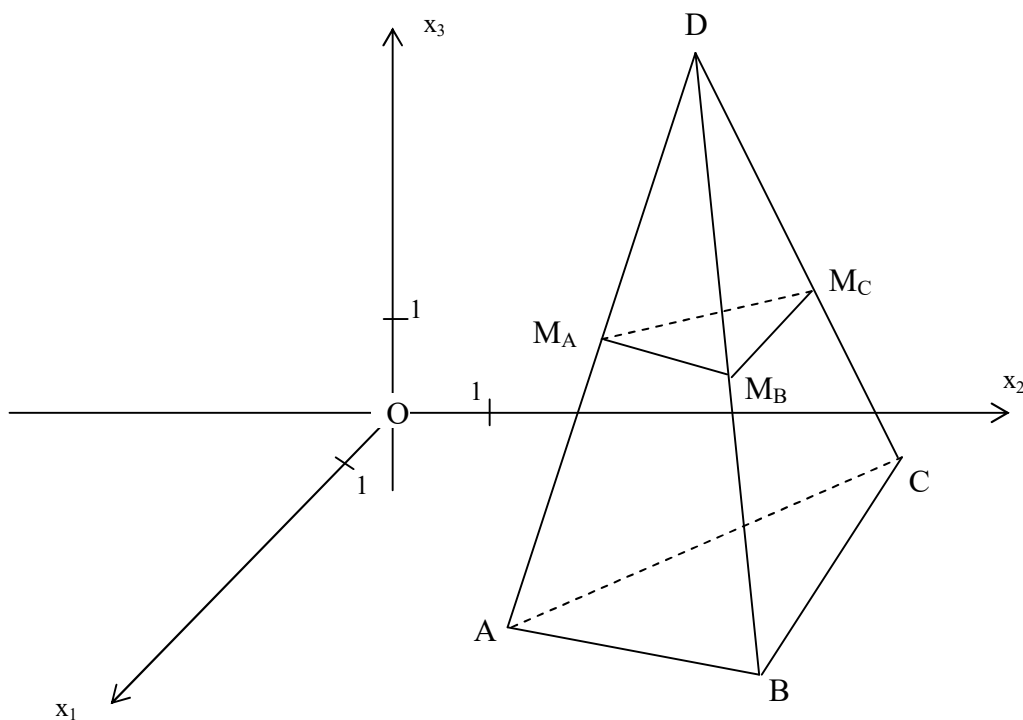
AUFGABEN

1) Gegeben ist eine dreiseitige Pyramide in einem räumlichen Koordinatensystem. (18P)

Mit M_A , M_B und M_C sind die Mittelpunkte der von D ausgehenden Kanten bezeichnet.

Berechnen Sie

- a) $\overrightarrow{OM_A}$ in Abhängigkeit von \overrightarrow{OA} und \overrightarrow{OD}
- b) $\overrightarrow{OM_B}$ in Abhängigkeit von \overrightarrow{OB} und \overrightarrow{OD}
- c) $\overrightarrow{OM_C}$ in Abhängigkeit von \overrightarrow{OC} und \overrightarrow{OD}



2) Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Gleichung: (16P)

$$x \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - 2x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = -x \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad x \in \mathbb{R}$$

Bemerkung:

Die Äquivalenzumformungen müssen **elementar** und in **nachvollziehbaren** Schritten (wie im Unterricht !!!) angegeben werden.

3) Stellen Sie den Vektor $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ als Linearkombination folgender Vektoren dar: (16P)

Bemerkung:

Lösungsmenge mit **Gausschem Algorithmus** angeben und dann Darstellung als Linearkombination !

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Bemerkung:

Die Äquivalenzumformungen müssen **elementar** und in **nachvollziehbaren** Schritten (wie im Unterricht !!!) angegeben werden.

Lösungen:

1)

$$\text{a) } \overrightarrow{OM_A} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} (\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} \overrightarrow{OD} - \frac{1}{2} \overrightarrow{OA} =$$

$$\frac{1}{2} \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} \overrightarrow{OD} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD})$$

$$\text{b) } \overrightarrow{OM_B} = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2} (\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{OD} - \frac{1}{2} \overrightarrow{OB} =$$

$$\frac{1}{2} \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{OD} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD})$$

$$\text{c) } \overrightarrow{OM_C} = \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2} \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2} (\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2} \overrightarrow{OD} - \frac{1}{2} \overrightarrow{OC} =$$

$$\frac{1}{2} \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2} \overrightarrow{OD} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$$

2)

$$x \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - 2x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = -x \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ 3 \end{pmatrix} \iff x \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - 2x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + x \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ 3 \end{pmatrix} \iff$$

$$x \cdot \left[\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ 3 \end{pmatrix} \iff x \cdot \begin{pmatrix} -2-2+2 \\ 3+4+1 \\ 4-6+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ 3 \end{pmatrix} \iff$$

$$x \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ 3 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} -2x \\ 8x \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ 3 \end{pmatrix} \iff -2x = -4 \wedge 8x = 16 \wedge x = 3 \iff$$

$$x = 2 \wedge x = 2 \wedge x = 3, \text{ also } L = \{ \}$$

3)

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 \cdot x_1 \\ -1 \cdot x_1 \\ 1 \cdot x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \cdot x_2 \\ 1 \cdot x_2 \\ 1 \cdot x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \cdot x_3 \\ 1 \cdot x_3 \\ -1 \cdot x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \iff$$

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 \\ -1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 \\ 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 - 1 \cdot x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \iff$$

$$1 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = -1 \wedge -1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = 4 \wedge 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 - 1 \cdot x_3 = -2 \iff$$

$$\begin{aligned} 1 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 &= -1 \\ -1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 &= 4 \\ 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 - 1 \cdot x_3 &= -2 \end{aligned} \quad (8P)$$

oder in Matritzenform: (5P)

x_1	x_2	x_3	b	Op	KS
1	-2	1	-1	G1	-1
-1	1	1	4	G2	5
1	1	-1	-2	G3	-1
1	-2	1	-1	G4=G1	-1
0	-1	2	3	G5=G1+G2	4
0	-3	2	1	G6=G1-G3	0
1	0	-3	-7	G7=-2G5+G4	-9
0	-1	2	3	G8=G5	4
0	0	-4	-8	G9=-3G5+G6	-12
-4	0	0	4	G10=-4G7+3G9	0
0	-2	0	-2	G11=G9+2G8	-4
0	0	-4	-8	G12=G9	-12
1	0	0	-1	G13=G10/-4	0
0	1	0	1	G14=G11/-2	2
0	0	1	2	G15=G12/-4	3

$$L = \{ (-1; 1; 2) \} \quad (2P)$$

also:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (1P)$$

*Name, Vorname:*Hilfsmittel:
keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben. Wenn nötig, Zeichnung machen.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punktabzug !!!!

AUFGABEN

1) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Gleichung: (14P)

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} - x \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

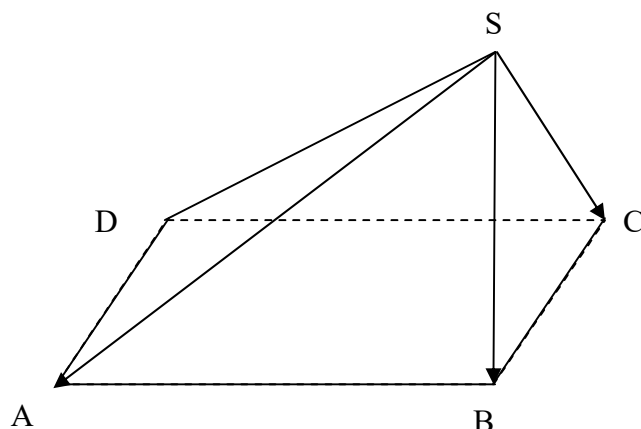
Bemerkung:

Die Äquivalenzumformungen müssen **elementar** und in **nachvollziehbaren** Schritten (wie im Unterricht !!!) angegeben werden.

1) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Gleichung: (21P)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bemerkungen:

Bei linearen Gleichungssystemen **muß** der Gaußsche Algorithmus benutzt werden !Die Äquivalenzumformungen müssen **elementar** und in **nachvollziehbaren** Schritten (wie im Unterricht !!!) angegeben werden.3) Stelle die "Kantenvektoren" \overrightarrow{SD} , \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{BC} , \overrightarrow{CD} , \overrightarrow{DA} der quadratischen Pyramide in der Abbildung unten als Linearkombination von $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{SC}$ dar. (15P)

Lösungen

1) insgesamt 14 Punkte

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} - x \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9x \\ 7x \\ 4x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5x \\ 7x \\ -x \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 9x-5x \\ 7x-7x \\ 4x-(-x) \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x \\ 0 \\ 5x \end{pmatrix} \Leftrightarrow 8 = 4x \wedge 0 = 0 \wedge 10 = 5x \Leftrightarrow$$

$$x = 2 \wedge 0 = 0 \wedge x = 2 \Leftrightarrow x = 2$$

$$L = \{2\}$$

Bewertung

Jede Äquivalenzumformung 2P, die Lösungsmenge 4P

2) insgesamt 21 Punkte

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot 1 \\ r \cdot 2 \\ r \cdot 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s \cdot 2 \\ s \cdot 1 \\ s \cdot 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1r+2s \\ 2r+1s \\ 5r \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow 1 = 1r + 2s \wedge 6 = 2r + 1s \wedge 10 = 5r \Leftrightarrow$$

Bewertung

Jede Äquivalenzumformung 3P

oder in Matritzenform:

x_1	x_2	b	Op	KS
1	2	1	G1	7
2	1	6	G2	9
5	0	10	G3	15
1	2	1	G4=G1	4
0	-3	4	G5=-2G1+G2	1
0	-10	5	G6=-5G1+G3	-5
3	0	11	G7=3G4+2G5	14
0	-3	4	G8=G5	1
0	0	-25	G9=-10G5+3G6	-25

$$L = \{ \}$$

3) insgesamt 15 Punkte

$$\vec{AB} = -\vec{a} + \vec{b}$$

$$\vec{BC} = -\vec{b} + \vec{c}$$

$$\vec{SD} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$$

$$\vec{CD} = \vec{a} - \vec{b}$$

$$\vec{AD} = \vec{BC} = -\vec{b} + \vec{c}$$

$$\vec{DA} = -\vec{AD} = -(-\vec{b} + \vec{c}) = \vec{b} - \vec{c}$$

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

Taschenrechner, beliebige Formelsammlungen, aber keine konkreten, gerechneten Beispiele.

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben. Wenn nötig, Zeichnung machen.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punktabzug !!!!

AUFGABEN

1) Gegeben ist eine Pyramide, deren Spitze sich im Ursprung $O(0|0|0)$ und deren Eckpunkte sich auf den Koordinatenachsen eines rechtwinkligen Koordinatensystems befinden.

Für die Länge der Seitenkanten gilt:

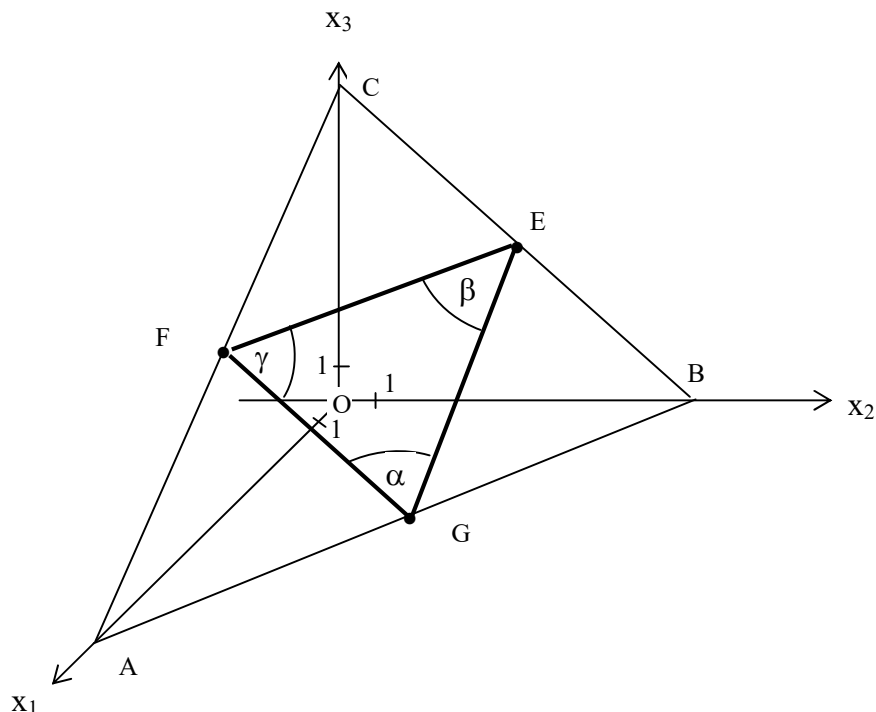
$$\left| \overrightarrow{OA} \right| = 8, \quad \left| \overrightarrow{OB} \right| = 4, \quad \left| \overrightarrow{OC} \right| = 2$$

Der Punkt E ist der Mittelpunkt der Strecke BC.

Der Punkt F ist der Mittelpunkt der Strecke AC.

Der Punkt G ist der Mittelpunkt der Strecke AB.

Skizze:



Bemerkungen:

1) Alle Berechnungen in der Aufgabe (Winkel) sind ausschließlich mit Hilfe der Vektorrechnung durchzuführen.

2) Zahlen auf 2 Stellen nach dem Komma runden.

a) Geben Sie die Punkte A, B, C mit ihren Koordinaten an. (3P)

b) Bestimmen Sie rechnerisch die Punkte E, F, G (mit ihren Koordinaten)(15P)

c) Bestimmen Sie rechnerisch die Winkel im Dreieck $\triangle EFG$. (30P)

Nehmen Sie die Punkte E, F, G wie folgt an:

$E(0 \mid 4 \mid 2)$, $F(8 \mid 0 \mid 2)$, $G(8 \mid 4 \mid 0)$

d) Probe machen (Winkelsumme !). (3P)

Lösungen:

a) A(8 | 0 | 0), B(0 | 4 | 0), C(0 | 0 | 2)

b)

$$\text{b1) } \overrightarrow{OE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0+0 \\ 4+0 \\ 0+2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\implies E(0 | 2 | 1)$$

$$\text{b2) } \overrightarrow{OF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 8+0 \\ 0+0 \\ 0+2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\implies F(4 | 0 | 1)$$

$$\text{b3) } \overrightarrow{OG} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 8+0 \\ 0+4 \\ 0+0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\implies G(4 | 2 | 0)$$

c)

c1)

9P

$$\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} 8-0 \\ 0-4 \\ 2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{EG} = \begin{pmatrix} 8-0 \\ 4-4 \\ 0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\cos \beta = \frac{\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EG}}{|\overrightarrow{EF}| \cdot |\overrightarrow{EG}|} = \frac{\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right|} = \frac{8 \cdot 8 + (-4) \cdot 0 + 0 \cdot (-2)}{\sqrt{8^2 + (-4)^2 + 0^2} \cdot \sqrt{8^2 + 0^2 + (-2)^2}} = \frac{64}{\sqrt{80} \cdot \sqrt{68}} = \frac{8}{\sqrt{85}}$$

$$\approx 0,87$$

$$\text{also: } \beta \approx 29,81^\circ$$

c2)

9P

$$\vec{GE} = -\vec{EG} = -\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{GF} = \begin{pmatrix} 8-8 \\ 0-4 \\ 2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{GE} \cdot \vec{GF}}{|\vec{GE}| \cdot |\vec{GF}|} = \frac{\begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{-8 \cdot 0 + 0 \cdot (-4) + 2 \cdot 2}{\sqrt{(-8)^2 + 0^2 + 2^2} \cdot \sqrt{0^2 + (-4)^2 + 2^2}} = \frac{4}{\sqrt{68} \cdot \sqrt{20}} = \frac{1}{\sqrt{85}}$$

$$\approx 0,11$$

$$\text{also: } \alpha \approx 83,77^\circ$$

c3)

9P

$$\vec{FE} = -\vec{EF} = -\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{FG} = -\vec{GF} = -\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\cos \gamma = \frac{\vec{FE} \cdot \vec{FG}}{|\vec{FE}| \cdot |\vec{FG}|} = \frac{\begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{-8 \cdot 0 + 4 \cdot 4 + 0 \cdot (-2)}{\sqrt{(-8)^2 + 4^2 + 0^2} \cdot \sqrt{0^2 + 4^2 + (-2)^2}} = \frac{16}{\sqrt{80} \cdot \sqrt{20}} = 0,4$$

$$\text{also: } \gamma \approx 66,42^\circ$$

d) Probe (Winkelsumme):

3P

$$\beta + \alpha + \gamma \approx 29,81^\circ + 83,77^\circ + 66,42^\circ \approx 180^\circ \quad (\text{wahr})$$

Name, Vorname:

Hilfsmittel:
Taschenrechner.

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben. Wenn nötig, Zeichnung machen.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punktabzug !!!!

AUFGABEN

1)

Gegeben sind die Punkte $A(-13 \mid -3 \mid 17)$ und $B(-7 \mid 6 \mid 5)$.

a)

4P

Berechnen Sie den Abstand zwischen A und B (exaktes Ergebnis und Näherung)
Wurzelausdruck vereinfachen (partiellles Wurzelziehen)!

b)

12P

Teile die Strecke \overline{AB} in 3 gleiche Teile und bestimme die Teilpunkte dieser Strecke.

c)

4P

Wie groß ist jeweils einer dieser 3 Teile ? (exaktes Ergebnis und Näherung)

2)

a)

5P

Geben Sie eine Gerade g (Geradengleichung in Parameterform) an, die durch die Punkte $A(1 \mid -2 \mid 5)$, $B(4 \mid 6 \mid -2)$ geht

b)

5P

Geben Sie eine (andere als bei a)) Geradengleichung in Parameterform derselben Geraden g an.

c)

5P

Geben Sie eine Gerade h_1 (Geradengleichung in Parameterform) an, die parallel, aber nicht identisch zu g ist (mit Begründung).

d)

15P

Geben Sie eine Gerade h_2 (Geradengleichung in Parameterform) an, die senkrecht zu g ist und durch A geht (mit Begründung).

Lösungen

1)

a)

$$d = \sqrt{(-7 - (-13))^2 + (6 - (-3))^2 + (5 - 17)^2} = \sqrt{6^2 + 9^2 + (-12)^2} = \sqrt{36 + 81 + 144} = \sqrt{36 + 81 + 144} = \sqrt{261} = \sqrt{9 \cdot 29} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{29} = 3 \cdot \sqrt{29} \approx 16,16$$

b)

$$\vec{v} = \frac{\vec{AB}}{3} = \frac{\begin{pmatrix} -7 - (-13) \\ 6 - (-3) \\ 5 - 17 \end{pmatrix}}{3} = \frac{\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -12 \end{pmatrix}}{3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{OT_1} = \vec{OA} + \vec{v} = \begin{pmatrix} -13 \\ -3 \\ 17 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 0 \\ 13 \end{pmatrix} \implies T_1(-11 \mid 0 \mid 13)$$

$$\vec{OT_2} = \vec{OA} + 2 \vec{v} = \begin{pmatrix} -13 \\ -3 \\ 17 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} \implies T_2(-9 \mid 3 \mid 9)$$

c)

$$e = \frac{d}{3} = \frac{3 \cdot \sqrt{29}}{3} = \sqrt{29} \approx 5,39$$

2)

a) $\vec{x} = \vec{OA} + r \cdot \vec{AB}$, also:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 - 1 \\ 6 - -2 \\ -2 - 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{g: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix}$$

b)

$$\text{g: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 16 \\ -14 \end{pmatrix}$$

c)

$$\text{h}_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 10 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Begründung:

c1) Da die 2 Richtungsvektoren gleich sind, sind die Geraden parallel.

c2) Der Stützvektor $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 10 \end{pmatrix}$ ist das zweifache des Stützvektors $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Damit sind die 2 zugehörigen Aufpunkte verschieden. Damit sind die Geraden nicht gleich.

d)

Zwei Vektoren stehen senkrecht aufeinander, wenn ihr Skalarprodukt 0 ergibt:

Der Vektor $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ steht senkrecht auf $\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix}$, also gilt:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$3v_1 + 8v_2 - 7v_3 = 0 \iff v_1 = \frac{7v_3 - 8v_2}{3}$$

Wähle z.B: $v_2 = -1$ und $v_3 = 1$, dann gilt: $v_1 = 5$

Damit:

$$h_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

Taschenrechner

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

AUFGABEN

1) Gegeben ist die Gerade durch die folgenden 2 Punkte:

A (1 | 2 | 3)

B (11 | -18 | -17)

a) Bestimmen Sie rechnerisch die Gleichung (in Parameterform) der Geraden $g = (AB)$ 3P

b) Zeigen Sie rechnerisch, dass der Punkt Q (19 | -34 | -33) auf der Geraden g liegt. 4P

c) Bestimmen Sie rechnerisch die Punkte P_1 und P_2 , die von A die Entfernung 120 LE (Längeneinheiten) haben und auf der Geraden g liegen. 16P

d) Durch die Punkte A und Q ist die Strecke \overline{AQ} gegeben.

Bestimmen Sie rechnerisch die Punkte T_1 und T_2 , so dass die Strecke \overline{AQ} in 3 gleiche Teile geteilt wird. 8P

e) Bestimmen Sie rechnerisch die Gerade h , die senkrecht auf g steht und durch den Punkt R(-25 | 12 | 25) geht. 15 P

f) Bestimmen Sie rechnerisch den Abstand des Punktes R(5 | 1 | 6) von der Geraden g . 1P

g) Bestimmen Sie rechnerisch einen Punkt C, so dass die Gerade $i = (BC)$ durch den Ursprung $O(0|0|0)$ geht und $B \neq C$ und $C \neq O(0|0|0)$ ist. 3P

Lösungen:

a)

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 11-1 \\ -18-2 \\ -17-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} \quad 3P$$

b)

Sei $Q \in g$, dann existiert ein t_s mit:

$$\begin{pmatrix} 19 \\ -34 \\ -33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t_s \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 19 \\ -34 \\ -33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+10t_s \\ 2-20t_s \\ 3-20t_s \end{pmatrix} \Leftrightarrow (t_s=1,8) \wedge (t_s=1,8) \wedge (t_s=1,8) \Leftrightarrow t_s=1,8$$

$$\Rightarrow Q \in g \quad 4P$$

c) Gesucht: t_x mit

$$|t_x \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix}| = 120 \quad 3P$$

$$|t_x \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix}| = \left| \begin{pmatrix} 10t_x \\ -20t_x \\ -20t_x \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(10t_x)^2 + (-20t_x)^2 + (-20t_x)^2} = \sqrt{900t_x^2} = 30\sqrt{t_x^2} \quad 4P$$

$$30\sqrt{t_x^2} = 120 \Leftrightarrow \sqrt{t_x^2} = 4 \Leftrightarrow |t_x| = 4 \Leftrightarrow t_{x1} = 4, t_{x2} = -4 \quad 5P$$

also:

4P

$$\vec{OP}_1 = \vec{OA} + t_x \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41 \\ -78 \\ -77 \end{pmatrix}$$

$$\vec{OP}_2 = \vec{OA} + t_x \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -39 \\ 82 \\ 83 \end{pmatrix}, \quad \text{also } P_1(41 | -78 | -77), P_2(-39 | 82 | 83)$$

d)

8P

$$\vec{AQ} = \begin{pmatrix} 19-1 \\ -34-2 \\ -33-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ -36 \\ -36 \end{pmatrix} \quad \vec{AT}_2 = \vec{OA} + \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} 18 \\ -36 \\ -36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} 18 \\ -36 \\ -36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -22 \\ -21 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AT}_1 = \vec{OA} + \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 18 \\ -36 \\ -36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 18 \\ -36 \\ -36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -10 \\ -9 \end{pmatrix}$$

also:

$$T_1(7 | -10 | -9) \quad T_2(13 | -22 | -21)$$

e)

$F(x_{1F} | x_{2F} | x_{3F})$ sei der Punkt, der auf g und h liegt:

$$\begin{pmatrix} x_{1F} \\ x_{2F} \\ x_{3F} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t_F \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_{1F} \\ x_{2F} \\ x_{3F} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+10t_F \\ 2-20t_F \\ 3-20t_F \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x_{1F} & = & 1+10t_F \\ x_{2F} & = & 2-20t_F \\ x_{3F} & = & 3-20t_F \end{matrix} \quad 2P$$

Es gilt außerdem:

$$\begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} \perp \vec{FR} \Leftrightarrow \quad 1P$$

$$\begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} -25 - x_{1F} \\ 12 - x_{2F} \\ 25 - x_{3F} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} -25 - (1 + 10t_F) \\ 12 - (2 - 20t_F) \\ 25 - (3 - 20t_F) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} -26 - 10t_F \\ 10 + 20t_F \\ 22 + 20t_F \end{pmatrix} \Leftrightarrow \quad 4P$$

$$\begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -26 - 10t_F \\ 10 + 20t_F \\ 22 + 20t_F \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$10 \cdot (-26 - 10t_F) + (-20) \cdot (10 + 20t_F) + (-20) \cdot (22 + 20t_F) = 0 \Leftrightarrow -260 - 100t_F - 200 - 400t_F - 440 - 400t_F = 0$$

$$\Leftrightarrow -900 - 900t_F = 0 \Leftrightarrow t_F = -1 \quad 3P$$

also:

$$\begin{pmatrix} x_{1F} \\ x_{2F} \\ x_{3F} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t_F \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 22 \\ 23 \end{pmatrix}, \quad \text{also: } F(-9 | 22 | 23) \quad 2P$$

Dann gilt:

$$\vec{FR} = \begin{pmatrix} -25 - (-9) \\ 12 - 22 \\ 25 - 23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 \\ -10 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und damit:} \quad 2P$$

$$\text{h: } \vec{x} = \begin{pmatrix} -9 \\ 22 \\ 23 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -16 \\ -10 \\ 2 \end{pmatrix} \quad 1P$$

f)

$$|\vec{FR}| = \left| \begin{pmatrix} -16 \\ -10 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-16)^2 + (-10)^2 + 2^2} = \sqrt{360} = 6\sqrt{10} \approx 18,97 \quad 1P$$

g)

1. Lösung:

O ist ein Aufpunkt und \vec{OB} ein Richtungsvektor dieser Geraden i. Also gilt:

$$\text{i: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 11 - 0 \\ -18 - 0 \\ -17 - 0 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ -18 \\ -17 \end{pmatrix} \quad 3P$$

wähle z.B. t = 2, dann gilt:

$$\begin{pmatrix} x_{1C} \\ x_{2C} \\ x_{3C} \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ -18 \\ -17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ -36 \\ -34 \end{pmatrix} \quad \text{und damit ist } C(22 | -36 | -34) \in i$$

2. Lösung (nicht so elegant):

Sei $C(x_{1C} | x_{2C} | x_{3C}) \in i$, dann ist B ein Aufpunkt und \overrightarrow{BC} ein Richtungsvektor dieser Geraden i . Also gilt:

$$i: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 11 \\ -18 \\ -17 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} x_{1C} - 11 \\ x_{2C} - (-18) \\ x_{3C} - (-17) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -18 \\ -17 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} x_{1C} - 11 \\ x_{2C} + 18 \\ x_{3C} + 17 \end{pmatrix}$$

Da $0 \in i$, existiert ein t_s mit:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -18 \\ -17 \end{pmatrix} + t_s \cdot \begin{pmatrix} x_{1C} - 11 \\ x_{2C} + 18 \\ x_{3C} + 17 \end{pmatrix} \iff \begin{aligned} 0 &= 11 + t_s \cdot x_{1C} - 11 t_s \\ 0 &= -18 + t_s \cdot x_{2C} + 18 t_s \\ 0 &= -17 + t_s \cdot x_{3C} + 17 t_s \end{aligned} \iff$$

$$x_{1C} = (-11 + 11 t_s) / t_s$$

$$x_{2C} = (+18 - 18 t_s) / t_s$$

$$x_{3C} = (17 - 17 t_s) / t_s$$

wähle z.B: $t_s = -1$, dann gilt:

$$x_{1C} = (-11 + 11 \cdot (-1)) / (-1) = 22$$

$$x_{2C} = (+18 - 18 \cdot (-1)) / (-1) = -36 \quad \text{und damit ist } C(22 | -36 | -34) \in i$$

$$x_{3C} = (17 - 17 \cdot (-1)) / (-1) = -34$$

2. Lösung von f)

Für alle Punkte $P(x_1 | x_2 | x_3)$, die sich frei auf der Gerade g bewegen und diese durchlaufen, gilt:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+10t \\ 2-20t \\ 3-20t \end{pmatrix} \iff \begin{aligned} x_1 &= 1+10t \\ x_2 &= 2-20t \\ x_3 &= 3-20t \end{aligned}$$

also:

$$\overrightarrow{RP} = \begin{pmatrix} x_1 - (-25) \\ x_2 - 12 \\ x_3 - 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+10t) + 25 \\ (2-20t) - 12 \\ (3-20t) - 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10t + 26 \\ -20t - 10 \\ -20t - 22 \end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{RP}| = \sqrt{(10t + 26)^2 + (-20t - 10)^2 + (-20t - 22)^2} =$$

$$\sqrt{100t^2 + 520t + 676 + 400t^2 + 400t + 100 + 400t^2 + 880t + 484} =$$

$$\sqrt{900t^2 + 1800t + 1260}$$

Wann wird dieser Wert minimal ?

Das Schaubild unter der Kurve ist eine nach oben geöffnete Parabel mit dem Scheitel $S(-1 | 360)$. D.h. für $t = -1$ wird der Wert unter der Wurzel minimal.

Also:

$$|\overrightarrow{RF}| = \sqrt{360}$$