

Name, Vorname:

Hilfsmittel:
keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben. Wenn nötig, Zeichnung machen.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M \setminus \{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punktabzug !!!!

AUFGABEN

1) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Gleichung: (14P)

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} - x \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Bemerkung:

Die Äquivalenzumformungen müssen **elementar** und in **nachvollziehbaren** Schritten (wie im Unterricht !!!) angegeben werden.

1) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Gleichung: (21P)

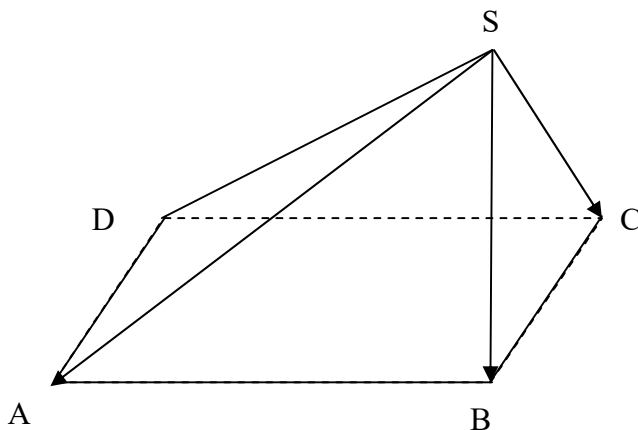
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bemerkungen:

Bei linearen Gleichungssystemen **muß** der Gaußsche Algorithmus benutzt werden !

Die Äquivalenzumformungen müssen **elementar** und in **nachvollziehbaren** Schritten (wie im Unterricht !!!) angegeben werden.

3) Stelle die "Kantenvektoren" \overrightarrow{SD} , \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{BC} , \overrightarrow{CD} , \overrightarrow{DA} der quadratischen Pyramide in der Abbildung unten als Linearkombination von $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{SC}$ dar. (15P)



Lösungen

1) insgesamt 14 Punkte

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} - x \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9x \\ 7x \\ 4x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5x \\ 7x \\ -x \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 9x-5x \\ 7x-7x \\ 4x-(-x) \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x \\ 0 \\ 5x \end{pmatrix} \Leftrightarrow 8 = 4x \wedge 0 = 0 \wedge 10 = 5x \Leftrightarrow$$

$$x = 2 \wedge 0 = 0 \wedge x = 2 \Leftrightarrow x = 2$$

$$L = \{2\}$$

Bewertung

Jede Äquivalenzumformung 2P , die Lösungsmenge 4P

2) insgesamt 21 Punkte

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot 1 \\ r \cdot 2 \\ r \cdot 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s \cdot 2 \\ s \cdot 1 \\ s \cdot 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1r+2s \\ 2r+1s \\ 5r \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow 1 = 1r + 2s \wedge 6 = 2r + 1s \wedge 10 = 5r \Leftrightarrow$$

Bewertung

Jede Äquivalenzumformung 3P

oder in Matritzenform:

x_1	x_2	b	Op	KS
1	2	1	G1	7
2	1	6	G2	9
5	0	10	G3	15
1	2	1	G4=G1	4
0	-3	4	G5=-2G1+G2	1
0	-10	5	G6=-5G1+G3	-5
3	0	11	G7=3G4+2G5	14
0	-3	4	G8=G5	1
0	0	-25	G9=-10G5+3G6	-25

1 P

2 P

2 P

$$L = \{ \}$$

3) insgesamt 15 Punkte

$$\vec{AB} = -\vec{a} + \vec{b}$$

$$\vec{BC} = -\vec{b} + \vec{c}$$

$$\vec{SD} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$$

$$\vec{CD} = \vec{a} - \vec{b}$$

$$\vec{AD} = \vec{BC} = -\vec{b} + \vec{c}$$

$$\vec{DA} = -\vec{AD} = -(-\vec{b} + \vec{c}) = \vec{b} - \vec{c}$$

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

Taschenrechner, beliebige Formelsammlungen, aber keine konkreten, gerechneten Beispiele.

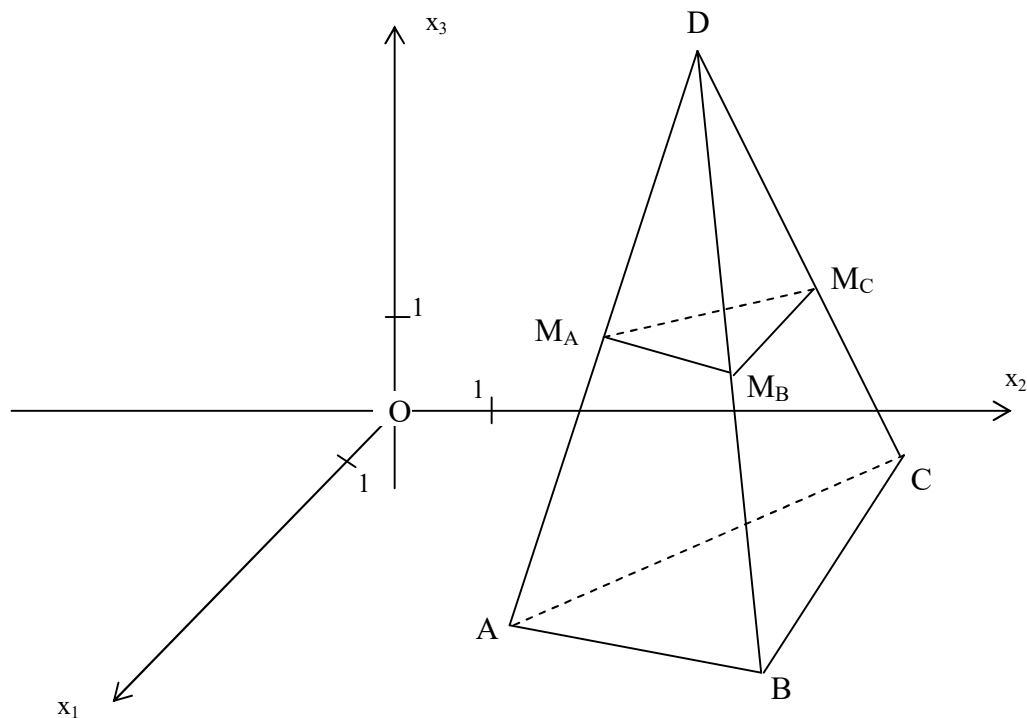
Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben. Wenn nötig, Zeichnung machen.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punktabzug !!!!

AUFGABEN**1) Gegeben ist eine dreiseitige Pyramide in einem räumlichen Koordinatensystem. (15P)**Mit M_A , M_B und M_C sind die Mittelpunkte der von D ausgehenden Kanten bezeichnet.

Berechnen Sie

- a) $\overrightarrow{OM_A}$ in Abhängigkeit von \overrightarrow{OA} und \overrightarrow{OD}
- b) $\overrightarrow{OM_B}$ in Abhängigkeit von \overrightarrow{OB} und \overrightarrow{OD}
- c) $\overrightarrow{OM_C}$ in Abhängigkeit von \overrightarrow{OC} und \overrightarrow{OD}



2) Gegeben sei die Pyramide von Aufgabe 1) mit den Koordinaten (6P)

A(-2 | 4 | -6), B(2 | 0 | -4), C(6 | -6 | 2), D(8 | 12 | 16)

Berechnen Sie die Punkte (mit Angabe ihrer Koordinaten) M_A , M_B und M_C

3) Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Gleichung: (15P)

$$x \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - 2x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = -x \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad x \in \mathbb{R}$$

Bemerkung:

Die Äquivalenzumformungen müssen **elementar** und in **nachvollziehbaren** Schritten (wie im Unterricht !!!) angegeben werden.

4) Stellen Sie den Vektor $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ als Linearkombination folgender Vektoren dar: (15P)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Bemerkung:

Die Äquivalenzumformungen müssen **elementar** und in **nachvollziehbaren** Schritten (wie im Unterricht !!!) angegeben werden.

Lösungen:

1)

$$a) \overrightarrow{OM_A} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} (\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} \overrightarrow{OD} - \frac{1}{2} \overrightarrow{OA} =$$

$$\frac{1}{2} \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} \overrightarrow{OD} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD})$$

$$b) \overrightarrow{OM_B} = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2} (\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{OD} - \frac{1}{2} \overrightarrow{OB} =$$

$$\frac{1}{2} \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{OD} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD})$$

$$c) \overrightarrow{OM_C} = \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2} \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2} (\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2} \overrightarrow{OD} - \frac{1}{2} \overrightarrow{OC} =$$

$$\frac{1}{2} \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2} \overrightarrow{OD} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$$

2)

$$a) \overrightarrow{OM_A} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}) = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 16 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} \implies M_A(3 \mid 8 \mid 5)$$

$$b) \overrightarrow{OM_B} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}) = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 16 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} \implies M_B(5 \mid 6 \mid 6)$$

$$c) \overrightarrow{OM_C} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 16 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} \implies M_C(7 \mid 3 \mid 9)$$

3)

$$x \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - 2x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = -x \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ 3 \end{pmatrix} \iff x \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - 2x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + x \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ 3 \end{pmatrix} \iff$$

$$x \cdot \left[\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ 3 \end{pmatrix} \iff x \cdot \begin{pmatrix} -2-2+2 \\ 3+4+1 \\ 4-6+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ 3 \end{pmatrix} \iff$$

$$x \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ 3 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} -2x \\ 8x \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ 3 \end{pmatrix} \iff -2x = -4 \wedge 8x = 16 \wedge x = 3 \iff$$

$$x = 2 \wedge x = 2 \wedge x = 3, \text{ also } L = \{ \}$$

4)

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 \cdot x_1 \\ -1 \cdot x_1 \\ 1 \cdot x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \cdot x_2 \\ 1 \cdot x_2 \\ 1 \cdot x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \cdot x_3 \\ 1 \cdot x_3 \\ -1 \cdot x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \iff$$

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 \\ -1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 \\ 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 - 1 \cdot x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \iff$$

$$1 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = -1 \wedge -1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = 4 \wedge 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 - 1 \cdot x_3 = -2 \iff$$

$$\begin{aligned} 1 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 &= -1 \\ -1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 &= 4 \\ 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 - 1 \cdot x_3 &= -2 \end{aligned} \quad (4P)$$

oder in Matritzenform:

(9P)

x_1	x_2	x_3	b	Op	KS
1	-2	1	-1	G1	-1
-1	1	1	4	G2	5
1	1	-1	-2	G3	-1
1	-2	1	-1	G4=G1	-1
0	-1	2	3	G5=G1+G2	4
0	-3	2	1	G6=G1-G3	0
1	0	-3	-7	G7=-2G5+G4	-9
0	-1	2	3	G8=G5	4
0	0	-4	-8	G9=-3G5+G6	-12
-4	0	0	4	G10=-4G7+3G9	0
0	-2	0	-2	G11=G9+2G8	-4
0	0	-4	-8	G12=G9	-12
1	0	0	-1	G13=G10/-4	0
0	1	0	1	G14=G11/-2	2
0	0	1	2	G15=G12/-4	3

$$L = \{ (-1; 1; 2) \} \quad (2P)$$

also:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

Keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben. Wenn nötig, Zeichnung machen.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M \setminus \{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

AUFGABEN

Bemerkungen:

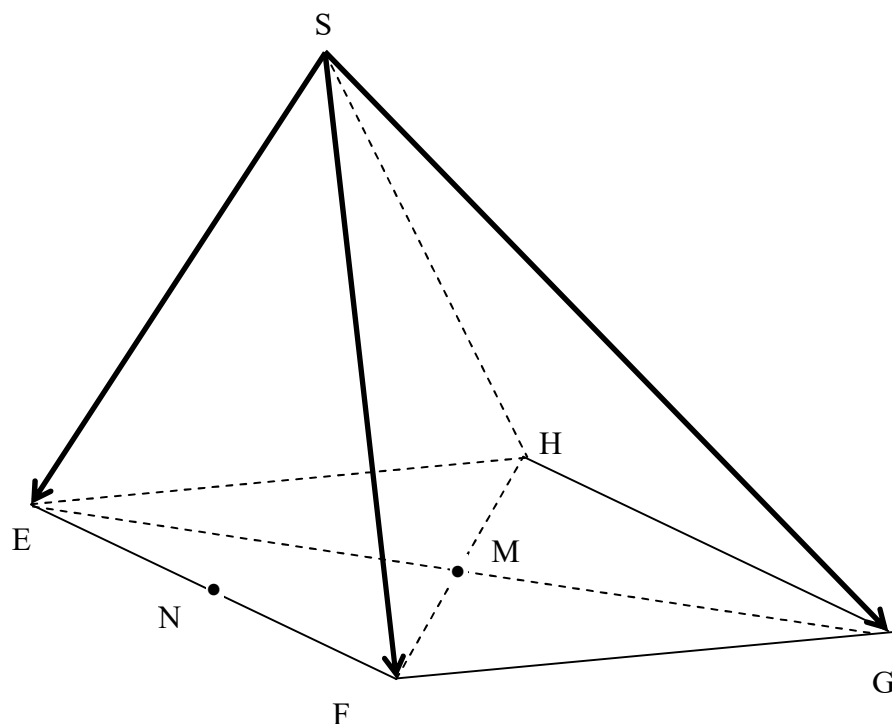
- 1) Bei linearen Gleichungssystemen **muss** der Gaussche Algorithmus benutzt werden !
- 2) Die Äquivalenzumformungen müssen **elementar** und in **nachvollziehbaren** Schritten (wie im Unterricht !!!) angegeben werden.

1) Stellen Sie die Vektoren \overrightarrow{SN} , \overrightarrow{SH} , \overrightarrow{SM} der Pyramide (mit einer rechteckigen Grundfläche) als Linearkombination der Vektoren

\overrightarrow{SE} , \overrightarrow{SF} , \overrightarrow{SG} dar.

Bemerkung:

N ist die Mitte der Strecke \overline{EF} und M ist die Mitte der Grundfläche (Rechteck) (15 P)



2) Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Gleichung:

(20 P)

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}x \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = -2x \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 16 \end{pmatrix}; \quad x \in \mathbb{R}$$

Bemerkung:

Die Äquivalenzumformungen müssen **elementar** und in **nachvollziehbaren** Schritten (wie im Unterricht !!!) angegeben werden.

3) Begründen Sie mathematisch, ob man den Vektor $\vec{g} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ als Linearkombination

folgender folgenden Vektoren darstellen kann:

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{e} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (15P)$$

Lösungen:

$$1) a) \overrightarrow{SN} = \frac{1}{2} \overrightarrow{SE} + \frac{1}{2} \overrightarrow{SF}$$

$$b) \overrightarrow{SH} = \overrightarrow{SE} + \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{SE} + (-\overrightarrow{SF} + \overrightarrow{SG}) = \overrightarrow{SE} - \overrightarrow{SF} + \overrightarrow{SG}$$

$$c) \overrightarrow{SM} = \overrightarrow{SE} + \frac{1}{2} \overrightarrow{EG} = \overrightarrow{SE} + \frac{1}{2} (-\overrightarrow{SE} + \overrightarrow{SG}) = \overrightarrow{SE} - \frac{1}{2} \overrightarrow{SE} + \frac{1}{2} \overrightarrow{SG} = \frac{1}{2} \overrightarrow{SE} + \frac{1}{2} \overrightarrow{SG}$$

2)

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} x \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = -2x \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 16 \end{pmatrix} \iff 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - x \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = -2x \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 16 \end{pmatrix} \iff$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} - x \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = -2x \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 16 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 16 \end{pmatrix} \iff$$

$$x \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 16 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \iff x \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix} \iff 3x = 6 \wedge 4x = 8 \wedge 5x = 10 \iff$$

$$x = 2 \wedge x = 2 \wedge x = 2, \text{ also } L = \{2\}$$

3)

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 \cdot x_1 \\ 2 \cdot x_1 \\ 1 \cdot x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \cdot x_2 \\ 1 \cdot x_2 \\ 1 \cdot x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \cdot x_3 \\ 3 \cdot x_3 \\ 2 \cdot x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \iff$$

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 \\ 2 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 \\ 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \iff$$

$$1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 = 1 \wedge 2 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 = 1 \wedge 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 = 2 \iff$$

$$1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 = 1$$

$$2 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 = 1$$

$$1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 = 2$$

oder in Matritzenform:

x_1	x_2	x_3	b	Op	KS
1	2	3	1	G1	7
2	1	3	1	G2	6
1	1	2	2	G3	7
1	2	3	1	G4=G1	7
0	-3	-3	-1	G5=-2G1+G2	-7
0	-1	-1	1	G6=-G1+G3	-1
3	0	3	1	G7=3G4+2G5	7
0	-3	-3	-1	G8=G5	-7
0	0	0	-4	G9=G5-3G6	-4

$L = \{ \}$, also ist der Vektor nicht als Linearkombination darstellbar.

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

Taschenrechner, beliebige Formelsammlungen, aber keine konkreten, gerechneten Beispiele.

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben. Wenn nötig, Zeichnung machen.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punktabzug !!!!

AUFGABEN

1) Gegeben ist ein Quader, dessen Seitenlängen sich wie folgt verhalten:

Breite : Länge : Höhe = 1 : 2 : 3 (siehe Skizze unten).

Ein Eckpunkt des Quaders befindet sich im Ursprung $O(0|0|0)$, ein anderer Eckpunkt A auf der positiven x_1 -Achse, ein anderer Eckpunkt B auf der positiven x_2 -Achse, ein anderer Eckpunkt C auf der positiven x_3 -Achse.

a) Zeichnen (keine Skizze !!) Sie den Quader in ein rechtwinkliges, dreidimensionales Koordinatensystem ein. (5P)

x_2 -Achse und x_3 -Achse: $1LE = 2\text{ cm}$; x_1 -Achse mit Schrägbildwinkel 45° und $1LE = \sqrt{2}\text{ cm}$

b) Berechnen Sie mit Hilfe der Vektorrechnung den Winkel (bitte alle dazu notwendigen Informationen in die Zeichnung eintragen, damit die Rechnung beim Korrigieren nachvollziehbar wird) zwischen der Raumdiagonale, die durch den Eckpunkt C des Quaders geht und der Projektion dieser Raumdiagonalen in die x_1 - x_2 -Ebene. (15P)

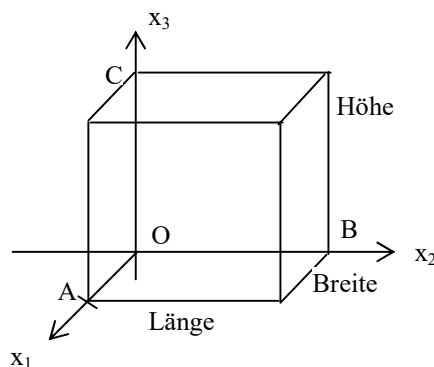
c) Berechnen Sie mit Hilfe der Vektorrechnung die Länge der Raumdiagonalen und die Länge der Projektion dieser Raumdiagonalen in die x_1 - x_2 -Ebene. (10P)

d) Zeigen Sie, dass das bei b) berechnete Ergebnis unabhängig von der Breite des Quaders ist. (10P)

e) Die Mitte der Raumdiagonale, die durch den Ursprung O und dem dem Ursprung gegenüberliegenden Eckpunkt D des Quaders liegt, wird mit M bezeichnet.

Wie läßt sich \vec{OM} als Linearkombination von \vec{OA} , \vec{OB} und \vec{OC} darstellen ? (10P)

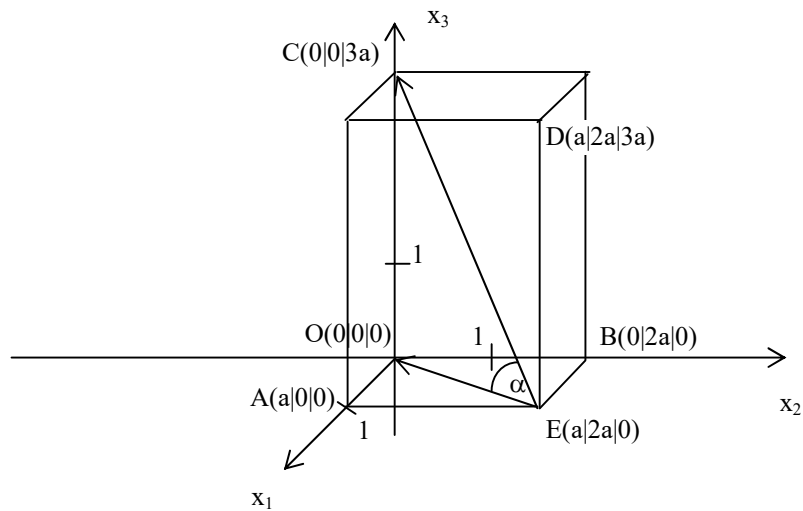
Skizze:



Lösungen:

1)

a) allgemeiner Nachweis für einen **beliebigen** Quader mit den oben gegebenen **Seitenverhältnissen**:



b)

$$\vec{EO} = \begin{pmatrix} 0-a \\ 0-2a \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ -2a \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{EC} = \begin{pmatrix} 0-a \\ 0-2a \\ 3a-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ -2a \\ 3a \end{pmatrix}$$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{EO} \cdot \vec{EC}}{|\vec{EO}| \cdot |\vec{EC}|} = \frac{a^2 + 4a^2}{\sqrt{5a^2} \cdot \sqrt{14a^2}} = \frac{5a^2}{\sqrt{70a^4}} = \frac{5}{\sqrt{70}}$$

$$\alpha \approx 53,30^\circ$$

=====

c)

$$\vec{OM} = \frac{1}{2} (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$$

=====

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

Keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben. Wenn nötig, Zeichnung machen.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

AUFGABEN

1) 20P

Gegeben sind die Punkte $A(-5 \mid 1 \mid 4)$ und $B(-1 \mid 9 \mid 16)$.

Teile die Strecke AB in 4 gleiche Teile und bestimme die Teilpunkte T1, T2, T3 dieser Strecke, wobei T1 dem Punkt A am Nächsten ist.

2) 30P

gegeben:

Gerade g mit der Gleichung

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

und

der Punkt $P(-7 \mid 9 \mid 5)$, von dem ein Lot (d.h. die Senkrechte) auf g gefällt wird.

gesucht:

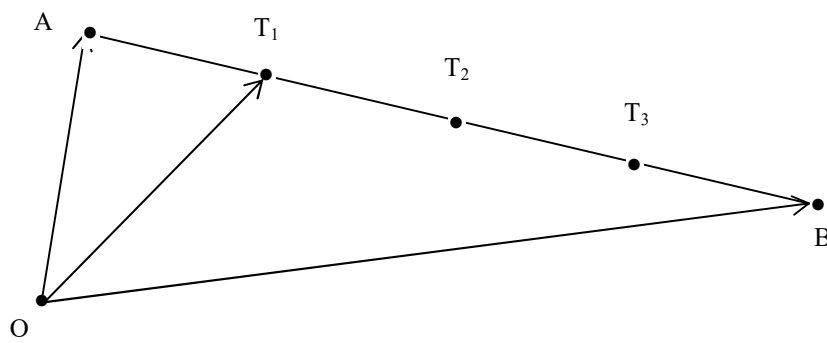
- a) Koordinaten des Schnittpunkts F zwischen der Senkrechten und g.
- b) Entfernung zwischen P und F

Bemerkung:

Begründung und Argumentation bei allen Aufgaben wie im Unterricht!!

Lösung:

1)



$$\vec{v} = \frac{\overrightarrow{AB}}{4} = \frac{\begin{pmatrix} -1 - (-5) \\ 9 - 1 \\ 16 - 4 \end{pmatrix}}{4} = \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}}{4} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad 5P$$

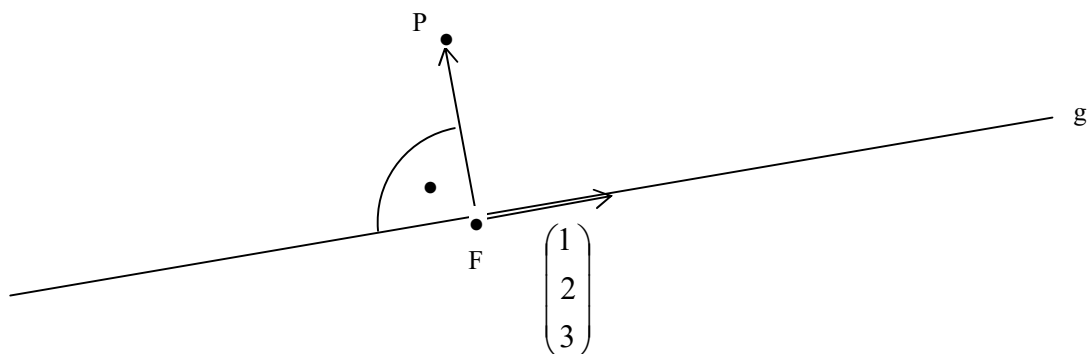
$$\overrightarrow{OT_1} = \overrightarrow{OA} + \vec{v} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5+1 \\ 1+2 \\ 4+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \implies T_1(-4 \mid 3 \mid 7) \quad 5P$$

$$\overrightarrow{OT_2} = \overrightarrow{OA} + 2 \vec{v} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5+2 \\ 1+4 \\ 4+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} \implies T_2(-3 \mid 5 \mid 10) \quad 5P$$

$$\overrightarrow{OT_3} = \overrightarrow{OA} + 3 \vec{v} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5+3 \\ 1+6 \\ 4+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 13 \end{pmatrix} \implies T_3(-2 \mid 7 \mid 13) \quad 5P$$

2) a)

Der Schnittpunkt sei $F(x_{1F} \mid x_{2F} \mid x_{3F})$.



Da $F(x_{1F} | x_{2F} | x_{3F}) \in g$, gibt es ein r_F mit:

$$\begin{pmatrix} x_{1F} \\ x_{2F} \\ x_{3F} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + r_F \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + r_F \\ -1 + 2r_F \\ 4 + 3r_F \end{pmatrix} \quad 3P$$

Außerdem gilt:

$$\vec{FP} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \text{ also } \begin{pmatrix} -7 - x_{1F} \\ 9 - x_{2F} \\ 5 - x_{3F} \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \text{ also } \begin{pmatrix} -7 - 2 - r_F \\ 9 + 1 - 2r_F \\ 5 - 4 - 3r_F \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \quad 9P$$

also:

$$\begin{pmatrix} -9 - r_F \\ 10 - 2r_F \\ 1 - 3r_F \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \text{ und damit:}$$

$$-9 - r_F + (10 - 2r_F) \cdot 2 + (1 - 3r_F) \cdot 3 = 0 \iff \quad 12P$$

$$-9 - r_F + 20 - 4r_F + 3 - 9r_F = 0 \iff$$

$$14 - 14r_F = 0 \iff$$

$$r_F = 1$$

also:

$$\begin{pmatrix} x_{1F} \\ x_{2F} \\ x_{3F} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}, \text{ also } F(3 | 1 | 7) \quad 2P$$

b) Entfernung zwischen P und F

$$|\vec{PF}| = \left| \begin{pmatrix} 3 - (-7) \\ 1 - 9 \\ 7 - 5 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 10 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{10^2 + (-8)^2 + 2^2} = \sqrt{168} \quad 4P$$

KLAUSUR 1 Mathematik 2 2BK11 Nachtermin 1 Zeit: 90 Minuten

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

Taschenrechner

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

AUFGABEN

1) Gegeben ist die Gerade durch die folgenden 2 Punkte:

A (1 | 2 | 3)

B (11 | -18 | -17)

a) Bestimmen Sie rechnerisch die Gleichung (in Parameterform) der Geraden $g = (AB)$ 3P

b) Zeigen Sie rechnerisch, dass der Punkt Q (19 | -34 | -33) auf der Geraden g liegt. 4P

c) Bestimmen Sie rechnerisch die Punkte P_1 und P_2 , die von A die Entfernung 120 LE (Längeneinheiten) haben und auf der Geraden g liegen. 16P

d) Durch die Punkte A und Q ist die Strecke \overline{AQ} gegeben.

Bestimmen Sie rechnerisch die Punkte T_1 und T_2 , so dass die Strecke \overline{AQ} in 3 gleiche Teile geteilt wird. 8P

e) Bestimmen Sie rechnerisch die Gerade h , die senkrecht auf g steht und durch den Punkt R(5 | 1 | 6) geht. 15 P

f) Bestimmen Sie rechnerisch den Abstand des Punktes R(5 | 1 | 6) von der Geraden g . 1P

g) Bestimmen Sie rechnerisch einen Punkt C, so dass die Gerade $i = (BC)$ durch den Ursprung $O(0|0|0)$ geht und $B \neq C$ und $C \neq O(0|0|0)$ ist. 3P

Lösungen:

a)

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 11-1 \\ -18-2 \\ -17-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} \quad 3P$$

b)

Sei $Q \in g$, dann existiert ein t_s mit:

$$\begin{pmatrix} 19 \\ -34 \\ -33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t_s \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 19 \\ -34 \\ -33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+10t_s \\ 2-20t_s \\ 3-20t_s \end{pmatrix} \Leftrightarrow (t_s=1,8) \wedge (t_s=1,8) \wedge (t_s=1,8) \Leftrightarrow t_s=1,8$$

$$\Rightarrow Q \in g \quad 4P$$

c) Gesucht: t_x mit

$$|t_x \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix}| = 120 \quad 3P$$

$$|t_x \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix}| = \left| \begin{pmatrix} 10t_x \\ -20t_x \\ -20t_x \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(10t_x)^2 + (-20t_x)^2 + (-20t_x)^2} = \sqrt{900t_x^2} = 30\sqrt{t_x^2} \quad 4P$$

$$30\sqrt{t_x^2} = 120 \Leftrightarrow \sqrt{t_x^2} = 4 \Leftrightarrow |t_x| = 4 \Leftrightarrow t_{x1} = 4, t_{x2} = -4 \quad 5P$$

also:

4P

$$\vec{OP}_1 = \vec{OA} + t_x \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41 \\ -78 \\ -77 \end{pmatrix}$$

$$\vec{OP}_2 = \vec{OA} + t_x \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -39 \\ 82 \\ 83 \end{pmatrix}, \quad \text{also } P_1(41 | -78 | -77), P_2(-39 | 82 | 83)$$

d)

8P

$$\vec{AQ} = \begin{pmatrix} 19-1 \\ -34-2 \\ -33-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ -36 \\ -36 \end{pmatrix} \quad \vec{AT}_2 = \vec{OA} + \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} 18 \\ -36 \\ -36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} 18 \\ -36 \\ -36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -22 \\ -21 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AT}_1 = \vec{OA} + \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 18 \\ -36 \\ -36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 18 \\ -36 \\ -36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -10 \\ -9 \end{pmatrix}$$

also:

$$T_1(7 | -10 | -9) \quad T_2(13 | -22 | -21)$$

e)

$F(x_{1F} | x_{2F} | x_{3F})$ sei der Punkt, der auf g und h liegt:

$$\begin{pmatrix} x_{1F} \\ x_{2F} \\ x_{3F} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t_F \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_{1F} \\ x_{2F} \\ x_{3F} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+10t_F \\ 2-20t_F \\ 3-20t_F \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x_{1F} & = & 1+10t_F \\ x_{2F} & = & 2-20t_F \\ x_{3F} & = & 3-20t_F \end{matrix} \quad 2P$$

Es gilt außerdem:

$$\begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} \perp \overrightarrow{FR} \Leftrightarrow \quad 1P$$

$$\begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 5-x_{1F} \\ 1-x_{2F} \\ 6-x_{3F} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 5-(1+10t_F) \\ 1-(2-20t_F) \\ 6-(3-20t_F) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 4-10t_F \\ -1+20t_F \\ 3+20t_F \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4-10t_F \\ -1+20t_F \\ 3+20t_F \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \quad 4P$$

$$10 \cdot (4-10t_F) + (-20) \cdot (-1+20t_F) + (-20) \cdot (3+20t_F) = 0 \Leftrightarrow 40 - 100t_F + 20 - 400t_F - 60 - 400t_F = 0 \Leftrightarrow$$

$$-900t_F = 0 \Leftrightarrow t_F = 0 \quad 3P$$

also:

$$\begin{pmatrix} x_{1F} \\ x_{2F} \\ x_{3F} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t_F \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \text{also: } F(1|2|3) \quad 2P$$

Dann gilt:

$$\overrightarrow{FR} = \begin{pmatrix} 5-1 \\ 1-2 \\ 6-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und damit:} \quad 2P$$

$$\text{h: } \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad 1P$$

f)

$$|\overrightarrow{FR}| = \left| \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{26} \quad 1P$$

g)

1. Lösung:

O ist ein Aufpunkt und \overrightarrow{OB} ein Richtungsvektor dieser Geraden i. Also gilt:

$$\text{i: } \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 11-0 \\ -18-0 \\ -17-0 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ -18 \\ -17 \end{pmatrix} \quad 3P$$

wähle z.B: t = 2, dann gilt:

$$\begin{pmatrix} x_{1C} \\ x_{2C} \\ x_{3C} \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ -18 \\ -17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ -36 \\ -34 \end{pmatrix} \quad \text{und damit ist } C(22 | -36 | -34) \in i$$

2. Lösung (nicht so elegant):

Sei $C(x_{1C} | x_{2C} | x_{3C}) \in i$, dann ist B ein Aufpunkt und \overrightarrow{BC} ein Richtungsvektor dieser Geraden i . Also gilt:

$$i: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 11 \\ -18 \\ -17 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} x_{1C} - 11 \\ x_{2C} - (-18) \\ x_{3C} - (-17) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -18 \\ -17 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} x_{1C} - 11 \\ x_{2C} + 18 \\ x_{3C} + 17 \end{pmatrix}$$

Da $0 \in i$, existiert ein t_s mit:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -18 \\ -17 \end{pmatrix} + t_s \cdot \begin{pmatrix} x_{1C} - 11 \\ x_{2C} + 18 \\ x_{3C} + 17 \end{pmatrix} \iff \begin{array}{l} 0 = 11 + t_s \cdot x_{1C} - 11 t_s \\ 0 = -18 + t_s \cdot x_{2C} + 18 t_s \\ 0 = -17 + t_s \cdot x_{3C} + 17 t_s \end{array} \iff$$

$$x_{1C} = (-11 + 11 t_s) / t_s$$

$$x_{2C} = (+18 - 18 t_s) / t_s$$

$$x_{3C} = (17 - 17 t_s) / t_s$$

wähle z.B: $t_s = -1$, dann gilt:

$$x_{1C} = (-11 + 11 \cdot (-1)) / (-1) = 22$$

$$x_{2C} = (+18 - 18 \cdot (-1)) / (-1) = -36 \quad \text{und damit ist } C(22 | -36 | -34) \in i$$

$$x_{3C} = (17 - 17 \cdot (-1)) / (-1) = -34$$

2. Lösung von f)

Für alle Punkte $P(x_1 | x_2 | x_3)$, die sich frei auf der Gerade g bewegen und diese durchlaufen, gilt:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+10t \\ 2-20t \\ 3-20t \end{pmatrix} \iff \begin{array}{l} x_1 = 1+10t \\ x_2 = 2-20t \\ x_3 = 3-20t \end{array}$$

also:

$$\overrightarrow{RP} = \begin{pmatrix} x_1 - 5 \\ x_2 - 1 \\ x_3 - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+10t) - 5 \\ (2-20t) - 1 \\ (3-20t) - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10t - 4 \\ -20t + 1 \\ -20t - 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{RP}| &= \sqrt{(10t - 4)^2 + (-20t + 1)^2 + (-20t - 3)^2} = \\ &= \sqrt{100t^2 - 80t + 16 + 400t^2 - 40t + 1 + 400t^2 + 120t + 9} = \\ &= \sqrt{26 + 900t^2} \end{aligned}$$

Wann wird dieser Wert minimal ?

Für $t = 0$!

also:

$$|\overrightarrow{RF}| = \sqrt{26}$$