

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

Taschenrechner, beliebige Formelsammlungen, aber keine konkreten, gerechneten Beispiele.

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben. Wenn nötig, Zeichnung machen.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B:  $3t$  statt  $2t+t$  und  $M$  statt  $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B:  $1/3$  nicht  $0,333$ ) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel:  $1/4$   $2/4$   $3/4$   $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punktabzug !!!!

## AUFGABEN

1) Bestimme, falls möglich, eine reelle Zahl  $x$  so, dass folgende Beziehung gilt:

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} - x \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Bemerkung:

Die Äquivalenzumformungen müssen **elementar** und in **nachvollziehbaren** Schritten (wie im Unterricht !!!) angegeben werden.

2) Bestimme, falls möglich, reelle Zahlen  $r$  und  $s$  so, dass folgende Beziehung gilt:

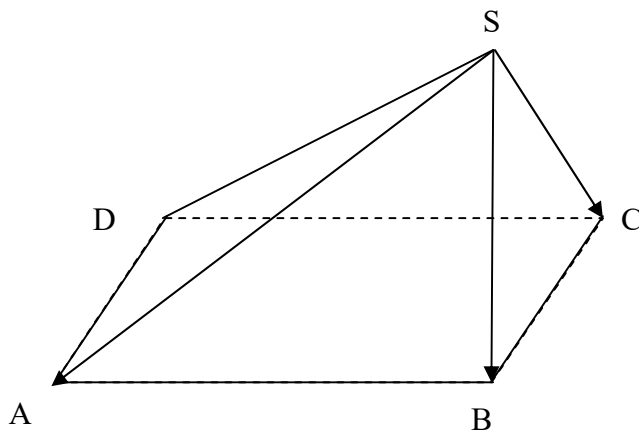
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bemerkungen:

Bei linearen Gleichungssystemen **muss** der Gaußsche Algorithmus benutzt werden !

Die Äquivalenzumformungen müssen **elementar** und in **nachvollziehbaren** Schritten (wie im Unterricht !!!) angegeben werden.

3) Stelle die "Kantenvektoren"  $\overrightarrow{SD}$ ,  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{BC}$ ,  $\overrightarrow{CD}$ ,  $\overrightarrow{DA}$  der quadratischen Pyramide in der Abbildung unten als Linearkombination von  $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{SA}$ ,  $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{SB}$ ,  $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{SC}$  dar.



Lösungen

1) insgesamt 14 Punkte

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} - x \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9x \\ 7x \\ 4x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5x \\ 7x \\ -x \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 9x-5x \\ 7x-7x \\ 4x-(-x) \end{pmatrix} \leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x \\ 0 \\ 5x \end{pmatrix} \leftrightarrow 8 = 4x \wedge 0 = 0 \wedge 10 = 5x \leftrightarrow$$

$$x = 2 \wedge 0 = 0 \wedge x = 2 \leftrightarrow x = 2$$

$$L = \{2\}$$

Bewertung

Jede Äquivalenzumformung 2P, die Lösungsmenge 4P

2) insgesamt 21 Punkte

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot 1 \\ r \cdot 2 \\ r \cdot 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s \cdot 2 \\ s \cdot 1 \\ s \cdot 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1r+2s \\ 2r+1s \\ 5r \end{pmatrix}$$

$$\leftrightarrow 1 = 1r + 2s \wedge 6 = 2r + 1s \wedge 10 = 5r \leftrightarrow$$

Bewertung

Jede Äquivalenzumformung 3P

oder in Matritzenform:

$x_1$	$x_2$	b	Op	KS
1	5	1	G1	7
2	1	6	G2	9
5	0	10	G3	15
1	2	1	G4=G1	4
0	-3	4	G5=-2G1+G2	1
0	-10	5	G6=-5G1+G3	-5
3	0	11	G7=3G4+2G5	14
0	-3	4	G8=G5	1
0	0	-25	G9=-10G5+3G6	-25

4 P

2 P

2 P

$$L = \{ \} \quad (4P)$$

3) insgesamt 15 Punkte

$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$$

$$\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$$

$$\overrightarrow{SD} = \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$$

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$$

$$\overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{AD} = -(-\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) = \overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}$$

*Name, Vorname:*

Hilfsmittel:

Taschenrechner, beliebige Formelsammlungen, aber keine konkreten, gerechneten Beispiele.

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben. Wenn nötig, Zeichnung machen.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B:  $3t$  statt  $2t+t$  und  $M$  statt  $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B:  $1/3$  nicht  $0,333$ ) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel:  $1/4$   $2/4$   $3/4$   $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punktabzug !!!!

**AUFGABEN**

1) Gegeben ist eine Pyramide, deren Spitze sich im Ursprung  $O(0|0|0)$  und deren Eckpunkte sich auf den Koordinatenachsen eines rechtwinkligen Koordinatensystems befinden.

Für die Länge der Seitenkanten gilt:

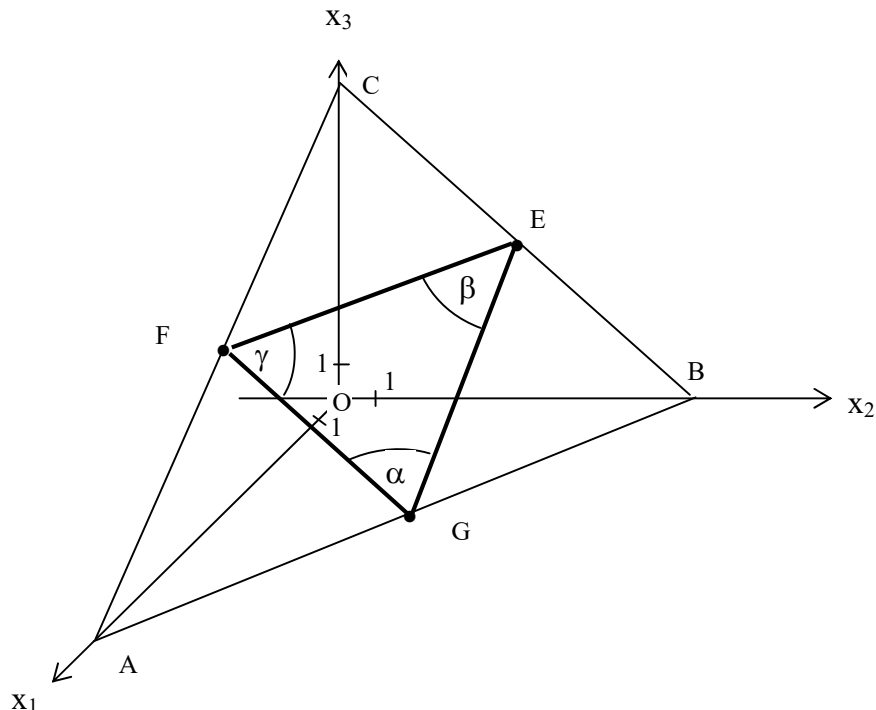
$$\left| \overrightarrow{OA} \right| = 8, \quad \left| \overrightarrow{OB} \right| = 4, \quad \left| \overrightarrow{OC} \right| = 2$$

Der Punkt E ist der Mittelpunkt der Strecke BC.

Der Punkt F ist der Mittelpunkt der Strecke AC.

Der Punkt G ist der Mittelpunkt der Strecke AB.

Skizze:



Bemerkungen:

1) Alle Berechnungen in der Aufgabe (Winkel) sind ausschließlich mit Hilfe der Vektorrechnung durchzuführen.

2) Zahlen auf 2 Stellen nach dem Komma runden.

a) Geben Sie die Punkte A, B, C mit ihren Koordinaten an. (3P)

b) Bestimmen Sie rechnerisch die Punkte E, F, G (mit ihren Koordinaten)(15P)

c) Bestimmen Sie rechnerisch die Winkel im Dreieck  $\triangle EFG$ . (30P)

Nehmen Sie die Punkte E, F, G wie folgt an:

$E(0 \mid 4 \mid 2)$ ,  $F(8 \mid 0 \mid 2)$ ,  $G(8 \mid 4 \mid 0)$

d) Probe machen (Winkelsumme !). (2P)

Lösungen:

a) A(8 | 0 | 0), B(0 | 4 | 0), C(0 | 0 | 2)

b)

$$\text{b1) } \overrightarrow{OE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0+0 \\ 4+0 \\ 0+2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\implies E(0 | 2 | 1)$$

$$\text{b2) } \overrightarrow{OF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 8+0 \\ 0+0 \\ 0+2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\implies F(4 | 0 | 1)$$

$$\text{b3) } \overrightarrow{OG} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 8+0 \\ 0+4 \\ 0+0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\implies G(4 | 2 | 0)$$

c)

c1)

9P

$$\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} 8-0 \\ 0-4 \\ 2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{EG} = \begin{pmatrix} 8-0 \\ 4-4 \\ 0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\cos \beta = \frac{\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EG}}{|\overrightarrow{EF}| \cdot |\overrightarrow{EG}|} = \frac{\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right|} = \frac{8 \cdot 8 + (-4) \cdot 0 + 0 \cdot (-2)}{\sqrt{8^2 + (-4)^2 + 0^2} \cdot \sqrt{8^2 + 0^2 + (-2)^2}} = \frac{64}{\sqrt{80} \cdot \sqrt{68}} = \frac{8}{\sqrt{85}}$$

$$\approx 0,87$$

$$\text{also: } \beta \approx 29,81^\circ$$

c2)

9P

$$\vec{GE} = -\vec{EG} = -\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{GF} = \begin{pmatrix} 8-8 \\ 0-4 \\ 2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{GE} \cdot \vec{GF}}{|\vec{GE}| \cdot |\vec{GF}|} = \frac{\begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{-8 \cdot 0 + 0 \cdot (-4) + 2 \cdot 2}{\sqrt{(-8)^2 + 0^2 + 2^2} \cdot \sqrt{0^2 + (-4)^2 + 2^2}} = \frac{4}{\sqrt{68} \cdot \sqrt{20}} = \frac{1}{\sqrt{85}}$$

$$\approx 0,11$$

$$\text{also: } \alpha \approx 83,77^\circ$$

c3)

9P

$$\vec{FE} = -\vec{EF} = -\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{FG} = -\vec{GF} = -\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\cos \gamma = \frac{\vec{FE} \cdot \vec{FG}}{|\vec{FE}| \cdot |\vec{FG}|} = \frac{\begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{-8 \cdot 0 + 4 \cdot 4 + 0 \cdot (-2)}{\sqrt{(-8)^2 + 4^2 + 0^2} \cdot \sqrt{0^2 + 4^2 + (-2)^2}} = \frac{16}{\sqrt{80} \cdot \sqrt{20}} = 0,4$$

$$\text{also: } \gamma \approx 66,42^\circ$$

d) Probe (Winkelsumme):

3P

$$\beta + \alpha + \gamma \approx 29,81^\circ + 83,77^\circ + 66,42^\circ \approx 180^\circ \quad (\text{wahr})$$

*Name, Vorname:*

Hilfsmittel:

Taschenrechner, beliebige Formelsammlungen, aber keine konkreten, gerechneten Beispiele.

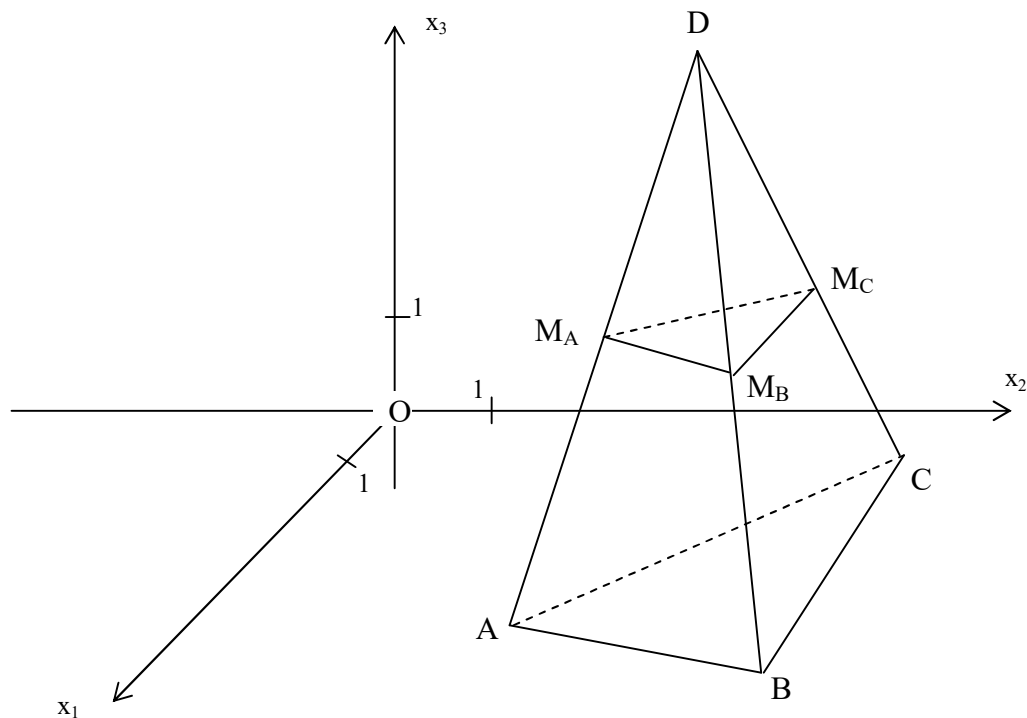
Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben. Wenn nötig, Zeichnung machen.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B:  $3t$  statt  $2t+t$  und  $M$  statt  $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B:  $1/3$  nicht  $0,333$ ) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel:  $1/4$   $2/4$   $3/4$   $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punktabzug !!!!

**AUFGABEN****1) Gegeben ist eine dreiseitige Pyramide in einem räumlichen Koordinatensystem. (15P)**Mit  $M_A$ ,  $M_B$  und  $M_C$  sind die Mittelpunkte der von D ausgehenden Kanten bezeichnet.

Berechnen Sie

- a)  $\overrightarrow{OM_A}$  in Abhängigkeit von  $\overrightarrow{OA}$  und  $\overrightarrow{OD}$
- b)  $\overrightarrow{OM_B}$  in Abhängigkeit von  $\overrightarrow{OB}$  und  $\overrightarrow{OD}$
- c)  $\overrightarrow{OM_C}$  in Abhängigkeit von  $\overrightarrow{OC}$  und  $\overrightarrow{OD}$



2) Gegeben sei die Pyramide von Aufgabe 1) mit den Koordinaten (6P)

A(-2 | 4 | -6), B(2 | 0 | -4), C(6 | -6 | 2), D(8 | 12 | 16)

Berechnen Sie die Punkte (mit Angabe ihrer Koordinaten)  $M_A$ ,  $M_B$  und  $M_C$

3) Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Gleichung: (15P)

$$x \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - 2x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = -x \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad x \in \mathbb{R}$$

Bemerkung:

Die Äquivalenzumformungen müssen **elementar** und in **nachvollziehbaren** Schritten (wie im Unterricht !!!) angegeben werden.

4) Stellen Sie den Vektor  $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$  als Linearkombination folgender Vektoren dar: (15P)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Bemerkung:

Die Äquivalenzumformungen müssen **elementar** und in **nachvollziehbaren** Schritten (wie im Unterricht !!!) angegeben werden.



Lösungen:

1)

$$a) \overrightarrow{OM_A} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} (\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} \overrightarrow{OD} - \frac{1}{2} \overrightarrow{OA} =$$

$$\frac{1}{2} \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} \overrightarrow{OD} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD})$$

$$b) \overrightarrow{OM_B} = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2} (\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{OD} - \frac{1}{2} \overrightarrow{OB} =$$

$$\frac{1}{2} \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{OD} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD})$$

$$c) \overrightarrow{OM_C} = \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2} \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2} (\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2} \overrightarrow{OD} - \frac{1}{2} \overrightarrow{OC} =$$

$$\frac{1}{2} \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2} \overrightarrow{OD} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$$

2)

$$a) \overrightarrow{OM_A} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}) = \frac{1}{2} \left( \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 16 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} \implies M_A(3 \mid 8 \mid 5)$$

$$b) \overrightarrow{OM_B} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}) = \frac{1}{2} \left( \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 16 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} \implies M_B(5 \mid 6 \mid 6)$$

$$c) \overrightarrow{OM_C} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) = \frac{1}{2} \left( \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 16 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} \implies M_C(7 \mid 3 \mid 9)$$

3)

$$x \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - 2x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = -x \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ 3 \end{pmatrix} \iff x \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - 2x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + x \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ 3 \end{pmatrix} \iff$$

$$x \cdot \left[ \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ 3 \end{pmatrix} \iff x \cdot \begin{pmatrix} -2-2+2 \\ 3+4+1 \\ 4-6+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ 3 \end{pmatrix} \iff$$

$$x \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ 3 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} -2x \\ 8x \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ 3 \end{pmatrix} \iff -2x = -4 \wedge 8x = 16 \wedge x = 3 \iff$$

$$x = 2 \wedge x = 2 \wedge x = 3, \text{ also } L = \{ \}$$

4)

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 \cdot x_1 \\ -1 \cdot x_1 \\ 1 \cdot x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \cdot x_2 \\ 1 \cdot x_2 \\ 1 \cdot x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \cdot x_3 \\ 1 \cdot x_3 \\ -1 \cdot x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \iff$$

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 \\ -1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 \\ 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 - 1 \cdot x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \iff$$

$$1 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = -1 \wedge -1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = 4 \wedge 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 - 1 \cdot x_3 = -2 \iff$$

$$\begin{aligned} 1 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 &= -1 \\ -1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 &= 4 \\ 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 - 1 \cdot x_3 &= -2 \end{aligned} \quad (4P)$$

oder in Matritzenform: (9P)

$x_1$	$x_2$	$x_3$	b	Op	KS
1	-2	1	-1	G1	-1
-1	1	1	4	G2	5
1	1	-1	-2	G3	-1
1	-2	1	-1	G4=G1	-1
0	-1	2	3	G5=G1+G2	4
0	-3	2	1	G6=G1-G3	0
1	0	-3	-7	G7=-2G5+G4	-9
0	-1	2	3	G8=G5	4
0	0	-4	-8	G9=-3G5+G6	-12
-4	0	0	4	G10=-4G7+3G9	0
0	-2	0	-2	G11=G9+2G8	-4
0	0	-4	-8	G12=G9	-12
1	0	0	-1	G13=G10/-4	0
0	1	0	1	G14=G11/-2	2
0	0	1	2	G15=G12/-4	3

$$L = \{ (-1; 1; 2) \} \quad (2P)$$

also:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

*Name, Vorname:*

Hilfsmittel:

Taschenrechner, beliebige Formelsammlungen, aber keine konkreten, gerechneten Beispiele.

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben. Wenn nötig, Zeichnung machen.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B:  $3t$  statt  $2t+t$  und  $M$  statt  $M \setminus \{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B:  $1/3$  nicht  $0,333$ ) angeben, falls möglich.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel:  $1/4$   $2/4$   $3/4$   $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

Bemerkung:

Unter "rechnerische Lösung" wird das im Unterricht verwendete Schema (nicht probieren !) verstanden.

**AUFGABEN**

1) Gegeben ist die Gerade  $g$  durch die folgende Parameterform: (15P)

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- a) Berechnen Sie die Spurpunkte mit der  $x_1$ - $x_2$ -Ebene.  
b) Begründen Sie das Ergebnis auch "anschaulich"

2) Gegeben ist die Gerade  $h$  durch die folgende Parameterform: (15P)

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- a) Berechnen Sie die Spurpunkte mit der  $x_1$ - $x_3$ -Ebene.  
b) Begründen Sie das Ergebnis auch "anschaulich"

3) Geben Sie die Menge aller Vektoren an, die senkrecht auf dem Vektor  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  stehen. (5P)

4) Geben Sie die Menge der Schnittpunkte der folgenden Geraden an: (15P)

$$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} -8 \\ 11 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ -12 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Lösungen:

1) a) (10P)

Der Spurpunkt sei  $S_{12} (x_{1S} | x_{2S} | x_{3S}) = S_{12} (x_{1S} | x_{2S} | 0)$ . Da der Spurpunkt auf der Geraden  $g$  liegt ( $S_{12} \in g$ ), erfüllen seine Koordinaten die Geradengleichung. Es gibt also ein  $r_s$  mit:

$$\begin{pmatrix} x_{1S} \\ x_{2S} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + r_s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} x_{1S} &= 3 + 2 \cdot r_s \\ x_{2S} &= 4 - r_s \\ 0 &= -2 \end{aligned}$$

Für die Lösungsmenge  $L$  dieses Gleichungssystems gilt:

$$L = \emptyset$$

Also gibt es keinen Spurpunkt.

b) Die  $x_3$ -Koordinate aller Punkte der Geraden  $g$  hat den Wert -2. Damit kann sie die  $x_1$ - $x_2$ -Ebene nicht schneiden, da alle Punkte  $x_1$ - $x_2$ -Ebene die  $x_3$ -Koordinate 0 haben. (5P)

2) a) (10P)

Der Spurpunkt sei  $S_{13} (x_{1S} | 0 | x_{3S})$ . Da der Spurpunkt auf der Geraden  $g$  liegt ( $S_{13} \in g$ ), erfüllen seine Koordinaten die Geradengleichung. Es gibt also ein  $r_s$  mit:

$$\begin{pmatrix} x_{1S} \\ 0 \\ x_{3S} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r_s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} x_{1S} &= -5 + 3 \cdot r_s \\ 0 &= 0 + 0 \cdot r_s \quad \Leftrightarrow \quad r_s \in \mathbb{R} \quad (\text{kann beliebig gewählt werden}) \\ x_{3S} &= 2 + r_s \end{aligned}$$

Damit gilt:

$$\begin{pmatrix} x_{1S} \\ x_{2S} \\ x_{3S} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r_s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad r_s \in \mathbb{R}$$

Es gibt also unendlich viele Lösungen.

b) Die  $x_2$ -Koordinate aller Punkte der Geraden  $h$  hat den Wert 0. Damit liegt sie in der  $x_1$ - $x_3$ -Ebene. Deshalb schneidet sie diese in unendlich vielen Punkten. (5P)

3) (5P)

Für einen Vektor  $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ , der senkrecht auf  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  steht, gilt:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \iff a + 2b + 3c = 0 \iff a = -2b - 3c$$

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mid a = -2b - 3c \wedge b \in R \wedge c \in R \right\}$$

4) Der Schnittpunkt sei  $S(x_{1S} \mid x_{2S} \mid x_{3S})$ . Dann gibt es ein  $r_s$  und  $t_s$  mit: (15P)

$$\begin{pmatrix} x_{1S} \\ x_{2S} \\ x_{3S} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r_s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{1S} \\ x_{2S} \\ x_{3S} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 11 \\ 5 \end{pmatrix} + t_s \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ -12 \\ -6 \end{pmatrix}$$

also:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r_s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 11 \\ 5 \end{pmatrix} + t_s \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ -12 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$-2 - 3r_s = -8 + 9t_s$	G1
$3 + 4r_s = 11 - 12t_s$	G2
$1 + 2r_s = 5 - 6t_s$	G3
$9t_s + 3r_s = 6$	G4
$-12t_s - 4r_s = -8$	G5
$-6t_s - 2r_s = -4$	G6
$9 \quad 3 \quad 6$	G4 Matrix-
$-12 \quad -4 \quad -8$	G5 schreib-
$-6 \quad -2 \quad -4$	G6 weise
$9 \quad 3 \quad -6$	G7=G4
$0 \quad 0 \quad 0$	G8=12*G4+9*G5
$0 \quad 0 \quad 0$	G9=2*G4+3*G6
$9 \quad 3 \quad -6$	G10=G7

$$9t_s + 3r_s = -6 \mid : 3$$

$$3t_s + r_s = -2$$

$$r_s = -2 - 9t_s$$

Es gibt unendlich viele Lösungen, also sind die Geraden identisch.

zweite Lösung:

Wenn zwei Geraden  $g$  und  $h$  parallel sind und ein Punkt von  $g$  auch auf  $h$  liegt, dann sind sie auch gleich.

a) Zeige, dass  $g$  und  $h$  parallel sind.

Dazu genügt zu zeigen, dass ein Richtungsvektor der einen Geraden einem Vielfachen (ungleich null) des Richtungsvektors der anderen Geraden ist.

$$k \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -12 \\ -6 \end{pmatrix} \iff$$

$$\begin{pmatrix} -3k \\ 4k \\ 2k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -12 \\ -6 \end{pmatrix} \iff$$

$$-3k = 9 \iff k = -3$$

$$4k = -12 \iff k = -3$$

$$2k = -6 \iff k = -3$$

Ergebnis: Der Richtungsvektor von  $g_1$  ist ein Vielfaches des Richtungsvektors von  $g_2$ .

2) Nimm einen Punkt auf  $g_1$ , z.B.  $P(-2 \mid 3 \mid 1)$ .

Zeige, dass dieser auf  $g_2$  liegt. Kurz zeige:

$$P(-2 \mid 3 \mid 1) \in g_1 \implies P(-2 \mid 3 \mid 1) \in g_2$$

$P(-2 \mid 3 \mid 1) \in g_1$ , dann gibt es ein  $r_p$  so dass gilt:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r_p \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \iff$$

$$-2 = -2 - 3 \cdot r_p \iff r_p = 0$$

$$3 = 3 + 4 \cdot r_p \iff r_p = 0$$

$$1 = 1 + 2 \cdot r_p \iff r_p = 0$$

Ergebnis:  $P(-2 \mid 3 \mid 1) \in g_2$ , also sind die Geraden identisch.