

*Name, Vorname:*

Hilfsmittel:

Taschenrechner, beliebige Formelsammlungen, aber keine konkreten, gerechneten Beispiele.

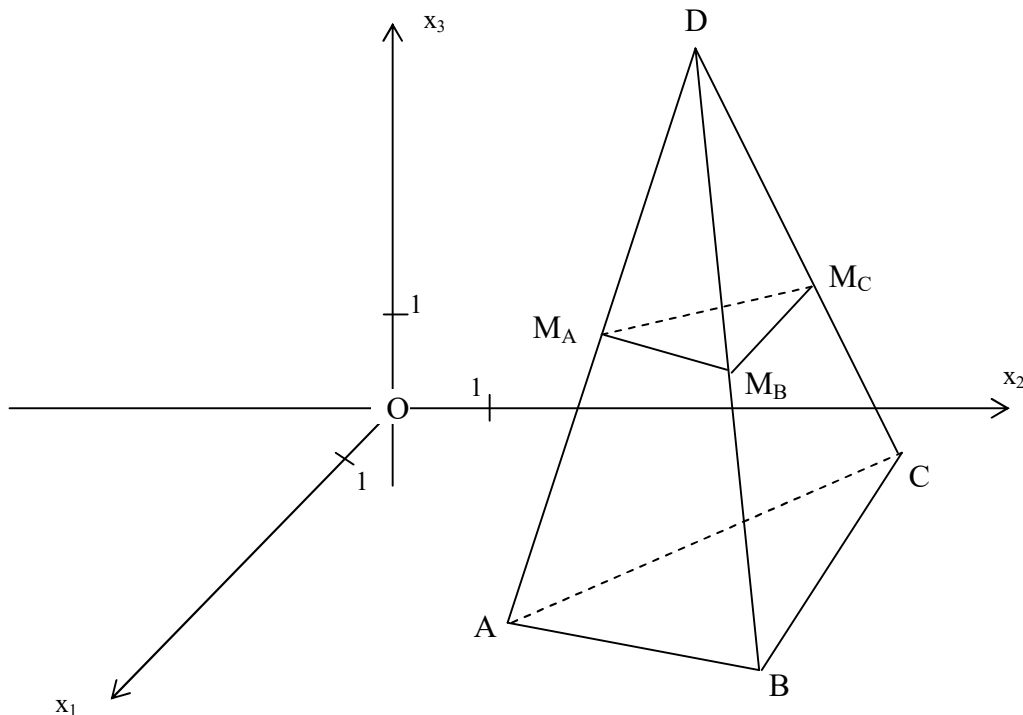
Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben. Wenn nötig, Zeichnung machen.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B:  $3t$  statt  $2t+t$  und  $M$  statt  $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B:  $1/3$  nicht  $0,333$ ) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel:  $1/4$   $2/4$   $3/4$   $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

## AUFGABEN

1) Gegeben ist eine dreiseitige Pyramide in einem räumlichen Koordinatensystem. Mit  $M_A$ ,  $M_B$  und  $M_C$  sind die Mittelpunkte der von D ausgehenden Kanten bezeichnet. Berechnen Sie

- a)  $\overrightarrow{OM_A}$  in Abhängigkeit von  $\overrightarrow{OA}$  und  $\overrightarrow{OD}$
- b)  $\overrightarrow{OM_B}$  in Abhängigkeit von  $\overrightarrow{OB}$  und  $\overrightarrow{OD}$
- c)  $\overrightarrow{OM_C}$  in Abhängigkeit von  $\overrightarrow{OC}$  und  $\overrightarrow{OD}$



2) Gegeben sei die Pyramide von Aufgabe 1) mit den Koordinaten

A(-2 | 4 | -6), B(2 | 0 | -4), C(6 | -6 | 2), D(8 | 12 | 16)

Berechnen Sie die Punkte (mit Angabe ihrer Koordinaten)  $M_A$ ,  $M_B$  und  $M_C$

3) Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Gleichung:

$$x \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - 2x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = -x \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad x \in \mathbb{R}$$

Bemerkung:

Die Äquivalenzumformungen müssen **elementar** und in **nachvollziehbaren** Schritten (wie im Unterricht !!!) angegeben werden.

4) Stellen Sie den Vektor  $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$  als Linearkombination folgender Vektoren dar:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Lösungen:

1)

$$a) \overrightarrow{OM_A} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} (\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} \overrightarrow{OD} - \frac{1}{2} \overrightarrow{OA} =$$

$$\frac{1}{2} \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} \overrightarrow{OD} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD})$$

$$b) \overrightarrow{OM_B} = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2} (\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{OD} - \frac{1}{2} \overrightarrow{OB} =$$

$$\frac{1}{2} \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{OD} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD})$$

$$c) \overrightarrow{OM_C} = \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2} \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2} (\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2} \overrightarrow{OD} - \frac{1}{2} \overrightarrow{OC} =$$

$$\frac{1}{2} \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2} \overrightarrow{OD} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$$

2)

$$a) \overrightarrow{OM_A} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}) = \frac{1}{2} \left( \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 16 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} \implies M_A(3 \mid 8 \mid 5)$$

$$b) \overrightarrow{OM_B} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}) = \frac{1}{2} \left( \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 16 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} \implies M_B(5 \mid 6 \mid 6)$$

$$c) \overrightarrow{OM_C} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) = \frac{1}{2} \left( \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 16 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} \implies M_C(7 \mid 3 \mid 9)$$

3)

$$x \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - 2x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = -x \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ 3 \end{pmatrix} \iff x \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - 2x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + x \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ 3 \end{pmatrix} \iff$$

$$x \cdot \left[ \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ 3 \end{pmatrix} \iff x \cdot \begin{pmatrix} -2-2+2 \\ 3+4+1 \\ 4-6+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ 3 \end{pmatrix} \iff$$

$$x \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ 3 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} -2x \\ 8x \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ 3 \end{pmatrix} \iff -2x = -4 \wedge 8x = 16 \wedge x = 3 \iff$$

$$x = 2 \wedge x = 2 \wedge x = 3, \text{ also } L = \{ \}$$

4)

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 \cdot x_1 \\ -1 \cdot x_1 \\ 1 \cdot x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \cdot x_2 \\ 1 \cdot x_2 \\ 1 \cdot x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \cdot x_3 \\ 1 \cdot x_3 \\ -1 \cdot x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \iff$$

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 \\ -1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 \\ 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 - 1 \cdot x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \iff$$

$$1 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = -1 \wedge -1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = 4 \wedge 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 - 1 \cdot x_3 = -2 \iff$$

$$\begin{aligned} 1 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 &= -1 \\ -1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 &= 4 \\ 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 - 1 \cdot x_3 &= -2 \end{aligned}$$

oder in Matritzenform:

$x_1$	$x_2$	$x_3$	b	Op	KS
1	-2	1	-1	G1	-1
-1	1	1	4	G2	5
1	1	-1	-2	G3	-1
1	-2	1	-1	G4=G1	-1
0	-1	2	3	G5=G1+G2	4
0	-3	2	1	G6=G1-G3	0
1	0	-3	-7	G7=-2G5+G4	-9
0	-1	2	3	G8=G5	4
0	0	-4	-8	G9=-3G5+G6	-12
-4	0	0	4	G10=-4G7+3G9	0
0	-2	0	-2	G11=G9+2G8	-4
0	0	-4	-8	G12=G9	-12
1	0	0	-1	G13=G10/-4	0
0	1	0	1	G14=G11/-2	2
0	0	1	2	G15=G12/-4	3

$$L = \{(-1; 1; 2)\}$$

also:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

*Name, Vorname:*

Hilfsmittel:

Taschenrechner, beliebige Formelsammlungen, aber keine konkreten, gerechneten Beispiele.

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben. Wenn nötig, Zeichnung machen.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B:  $3t$  statt  $2t+t$  und  $M$  statt  $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B:  $1/3$  nicht  $0,333$ ) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel:  $1/4$   $2/4$   $3/4$   $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

## AUFGABEN

1) Lösen Sie die Gleichungen nach  $\vec{x}$  auf:

$$-(6 \vec{a} - 8 \vec{b} + \vec{x}) + 7 \cdot [3 \vec{a} - 4 \vec{x} + 3(\vec{b} - \vec{x})] = \vec{x}$$

2) Berechnen Sie  $\vec{x}$  :

$$4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - 3 \vec{x} = (-5) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 3 \vec{x}$$

3) Die Punkte A, B, C, D mit  $A(7|7|7)$ ,  $B(3|2|1)$ ,  $C(4|5|6)$  liegen in einer Ebene und sind die Ecken eines Parallelogramms. Bestimmen Sie die Koordinaten des Diagonalschnittpunkts M des Parallelogramms.

4) Der Schwerpunkt S eines Dreiecks ABC ist der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden des Dreiecks. Die Seitenhalbierenden teilen sich im Verhältnis 2:1.

Bestimme den Schwerpunkt S des Dreiecks ABC mit Hilfe der Ortsvektoren von A, B und C.

*Name, Vorname:*

Hilfsmittel:

Taschenrechner, beliebige Formelsammlungen, aber keine konkreten, gerechneten Beispiele.

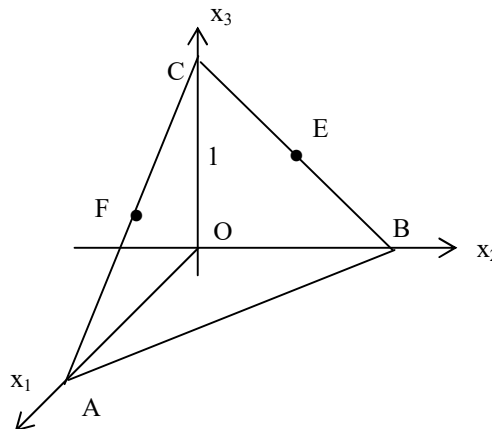
Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben. Wenn nötig, Zeichnung machen.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B:  $3t$  statt  $2t+t$  und  $M$  statt  $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B:  $1/3$  nicht  $0,333$ ) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel:  $1/4$   $2/4$   $3/4$   $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

## AUFGABEN

1) Gegeben ist eine Pyramide, deren Spitze sich im Ursprung  $O(0|0|0)$  und deren Eckpunkte sich auf den Koordinatenachsen eines rechtwinkligen Koordinatensystems befinden. Jede von der Spitze  $O(0|0|0)$  ausgehende Seitenkante der Pyramide hat die Länge 1 LE. Der Punkt E ist der Mittelpunkt der Strecke BC. Der Punkt F ist der Mittelpunkt der Strecke AC.

Skizze:



- a) Bestimmen Sie die Parameterform der Geraden  $g_1 = (BF)$
- b) Bestimmen Sie die Parameterform der Geraden  $g_2 = (AE)$
- c) Bestimmen Sie den Schnittpunkt S der Geraden  $g_1$  und  $g_2$ , indem Sie ein entsprechendes Gleichungssystem aufstellen.
- d) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks  $\triangle ABC$
- e) Bestimmen Sie die Länge der Strecke  $h = OS$ .
- f) Beweisen Sie (mit Hilfe des Skalarprodukts), dass  $h$  senkrecht zu der durch die Punkte A,B,C definierten Grundfläche ist.
- g) Bestimmen Sie das Volumen der Pyramide.

Lösung:

- a)  $A(1 \mid 0 \mid 0)$ ;  $B(0 \mid 1 \mid 0)$ ;  $C(0 \mid 0 \mid 1)$

a1) Berechnung von E:

$$\vec{OE} = \frac{\vec{OB} + \vec{OC}}{2} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{2} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}, \text{ also } E(0 \mid 0,5 \mid 0,5)$$

a2) Berechnung von F:

$$\vec{OF} = \frac{\vec{OA} + \vec{OC}}{2} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{2} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0 \\ 0,5 \end{pmatrix}, \text{ also } F(0,5 \mid 0 \mid 0,5)$$

Berechnung von g<sub>1</sub>

$$g_1: \vec{X} = \vec{OB} + r \cdot \vec{BF} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0,5-0 \\ 0-1 \\ 0,5-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0,5 \\ -1 \\ 0,5 \end{pmatrix}$$

b)

$$g_2: \vec{X} = \vec{OA} + r \cdot \vec{AE} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0-1 \\ 0,5-0 \\ 0,5-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$$

c)

Für den Schnittpunkt S(x<sub>1S</sub>|x<sub>2S</sub>|x<sub>3S</sub>) gibt es ein t<sub>s</sub> und ein r<sub>s</sub> mit:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r_s \cdot \begin{pmatrix} 0,5 \\ -1 \\ 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} 0,5 \cdot r_s = 1 - t_s \\ 1 - r_s = 0,5 \cdot t_s \\ 0,5 \cdot r_s = 0,5 \cdot t_s \end{matrix} \Leftrightarrow t_s = 2/3 \quad r_s = 2/3$$

Für den Schnittpunkt S(x<sub>s1</sub>|x<sub>s2</sub>|x<sub>s3</sub>) gilt dann:

$$\begin{pmatrix} x_{1S} \\ x_{2S} \\ x_{3S} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} 0,5 \\ -1 \\ 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich der Schnittpunkt:

$$S\left(\frac{1}{3} \mid \frac{1}{3} \mid \frac{1}{3}\right)$$

=====

d) Länge jeder Seite a des Dreiecks ΔABC: a = √2

Damit ist der Flächeninhalt: A =  $\frac{a^2}{4} \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

e)

$$h = |\vec{OS}| = \left| \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

f)

$$\vec{OS} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad \vec{AE} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \vec{OS} \cdot \vec{AE} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 0$$

$$g) V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{6}$$



Name, Vorname:

Hilfsmittel:

Taschenrechner, beliebige Formelsammlungen, aber keine konkreten, gerechneten Beispiele.

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben. Wenn nötig, Zeichnung machen.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B:  $3t$  statt  $2t+t$  und  $M$  statt  $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B:  $1/3$  nicht  $0,333$ ) angeben.
- Der Name und Vorna me muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel:  $1/4$   $2/4$   $3/4$   $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

## AUFGABEN

1) Gegeben ist die Gerade durch die folgenden 2 Punkte:

A (1 | 2 | 3)

B (11 | -18 | -17)      3 P

a) Bestimmen Sie rechnerisch die Gleichung (in Parameterform) der Geraden  $g = (AB)$     8 P

b) Zeigen Sie rechnerisch, dass der Punkt Q (19 | -34 | -33) auf der Geraden g liegt.      13 P

c) Bestimmen Sie rechnerisch die Punkte  $P_1$  und  $P_2$ , die von A die Entfernung 120 LE (Längeneinheiten) haben und auf der Geraden g liegen.

d) Durch die Punkte A und Q ist die Strecke  $\overline{AQ}$  gegeben.

Bestimmen Sie rechnerisch die Punkte  $T_1$  und  $T_2$ , so dass die Strecke  $\overline{AQ}$  in 3 gleiche Teile geteilt wird.      8 P

e) Bestimmen Sie rechnerisch die Gerade h, die senkrecht auf g steht und durch den Punkt R(5 | 1 | 6) geht.      13 P

f) Bestimmen Sie rechnerisch den Abstand des Punktes R(5 | 1 | 6) von der Geraden g.    1 P

g) Bestimmen Sie rechnerisch einen Punkt C, so dass die Gerade  $i = (BC)$  durch den Ursprung  $O(0|0|0)$  geht und  $B \neq C$  und  $C \neq O(0|0|0)$  ist.    5 P

Lösungen:

a)

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 11-1 \\ -18-2 \\ -17-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix}$$

b)

Sei  $Q \in g$ , dann existiert ein  $t_s$  mit:

$$\begin{pmatrix} 19 \\ -34 \\ -33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t_s \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 19 \\ -34 \\ -33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+10t_s \\ 2-20t_s \\ 3-20t_s \end{pmatrix} \Leftrightarrow (t_s=1,8) \wedge (t_s=1,8) \wedge (t_s=1,8) \Leftrightarrow t_s=1,8$$

$\Rightarrow Q \in g$

c) Gesucht:  $t_x$  mit

$$|t_x \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix}| = 120$$

$$|t_x \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix}| = \left| \begin{pmatrix} 10t_x \\ -20t_x \\ -20t_x \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(10t_x)^2 + (-20t_x)^2 + (-20t_x)^2} = \sqrt{900t_x^2} = 30\sqrt{t_x^2}$$

$$30\sqrt{t_x^2} = 120 \Leftrightarrow \sqrt{t_x^2} = 4 \Leftrightarrow |t_x| = 4 \Leftrightarrow t_{x1} = 4, t_{x2} = -4$$

also:

$$\vec{OP}_1 = \vec{OA} + t_x \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41 \\ -78 \\ -77 \end{pmatrix}$$

$$\vec{OP}_2 = \vec{OA} + t_x \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -39 \\ 82 \\ 83 \end{pmatrix}, \quad \text{also } P_1(41 | -78 | -77), P_2(-39 | 82 | 83)$$

d)

$$\vec{AQ} = \begin{pmatrix} 19-1 \\ -34-2 \\ -33-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ -36 \\ -36 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AT}_2 = \vec{OA} + \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} 18 \\ -36 \\ -36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} 18 \\ -36 \\ -36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -22 \\ -21 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AT}_1 = \vec{OA} + \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 18 \\ -36 \\ -36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 18 \\ -36 \\ -36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -10 \\ -9 \end{pmatrix}$$

also:

$$T_1(7 | -10 | -9) \quad T_2(13 | -22 | -21)$$

e)

$F(x_{1F} | x_{2F} | x_{3F})$  sei der Punkt, der auf  $g$  und  $h$  liegt:

$$\begin{pmatrix} x_{1F} \\ x_{2F} \\ x_{3F} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t_F \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_{1F} \\ x_{2F} \\ x_{3F} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+10t_F \\ 2-20t_F \\ 3-20t_F \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x_{1F} & = & 1+10t_F \\ x_{2F} & = & 2-20t_F \\ x_{3F} & = & 3-20t_F \end{matrix}$$

Es gilt außerdem:

$$\begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} \perp \vec{FR} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 5 - x_{1F} \\ 1 - x_{2F} \\ 6 - x_{3F} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 5 - (1 + 10t_F) \\ 1 - (2 - 20t_F) \\ 6 - (3 - 20t_F) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 4 - 10t_F \\ -1 + 20t_F \\ 3 + 20t_F \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 - 10t_F \\ -1 + 20t_F \\ 3 + 20t_F \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$10 \cdot (4 - 10t_F) + (-20) \cdot (-1 + 20t_F) + (-20) \cdot (3 + 20t_F) = 0 \Leftrightarrow 40 - 100t_F + 20 - 400t_F - 60 - 400t_F = 0 \Leftrightarrow -900t_F = 0 \Leftrightarrow t_F = 0$$

also:

$$\begin{pmatrix} x_{1F} \\ x_{2F} \\ x_{3F} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t_F \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \text{ also: } F(1 | 2 | 3)$$

Dann gilt:

$$\vec{FR} = \begin{pmatrix} 5 - 1 \\ 1 - 2 \\ 6 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und damit:}$$

$$\text{h: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

f)

$$|\vec{FR}| = \left| \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4^2 + (-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{26}$$

g)

1. Lösung:

O ist ein Aufpunkt und  $\vec{OB}$  ein Richtungsvektor dieser Geraden i. Also gilt:

$$\text{i: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 11 - 0 \\ -18 - 0 \\ -17 - 0 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ -18 \\ -17 \end{pmatrix}$$

wähle z.B: t = 2, dann gilt:

$$\begin{pmatrix} x_{1C} \\ x_{2C} \\ x_{3C} \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ -18 \\ -17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ -36 \\ -34 \end{pmatrix} \text{ und damit ist } C(22 | -36 | -34) \in i$$

## 2. Lösung (nicht so elegant):

Sei  $C(x_{1C} | x_{2C} | x_{3C}) \in i$ , dann ist  $B$  ein Aufpunkt und  $\overrightarrow{BC}$  ein Richtungsvektor dieser Geraden  $i$ . Also gilt:

$$i: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 11 \\ -18 \\ -17 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} x_{1C} - 11 \\ x_{2C} - (-18) \\ x_{3C} - (-17) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -18 \\ -17 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} x_{1C} - 11 \\ x_{2C} + 18 \\ x_{3C} + 17 \end{pmatrix}$$

Da  $0 \in i$ , existiert ein  $t_s$  mit:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -18 \\ -17 \end{pmatrix} + t_s \cdot \begin{pmatrix} x_{1C} - 11 \\ x_{2C} + 18 \\ x_{3C} + 17 \end{pmatrix} \iff \begin{matrix} 0 = 11 + t_s \cdot x_{1C} - 11 t_s \\ 0 = -18 + t_s \cdot x_{2C} + 18 t_s \\ 0 = -17 + t_s \cdot x_{3C} + 17 t_s \end{matrix} \iff$$

$$x_{1C} = (-11 + 11 t_s) / t_s$$

$$x_{2C} = (+18 - 18 t_s) / t_s$$

$$x_{3C} = (17 - 17 t_s) / t_s$$

wähle z.B:  $t_s = -1$ , dann gilt:

$$x_{1C} = (-11 + 11 \cdot (-1)) / (-1) = 22$$

$$x_{2C} = (+18 - 18 \cdot (-1)) / (-1) = -36 \quad \text{und damit ist } C(22 | -36 | -34) \in i$$

$$x_{3C} = (17 - 17 \cdot (-1)) / (-1) = -34$$

## 2. Lösung von f)

$F(x_{1F} | x_{2F} | x_{3F})$  sei der Punkt, der auf  $g$  und  $h$  liegt:

$$\begin{pmatrix} x_{1F} \\ x_{2F} \\ x_{3F} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t_F \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_{1F} \\ x_{2F} \\ x_{3F} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+10t_F \\ 2-20t_F \\ 3-20t_F \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x_{1F} & = & 1+10t_F \\ x_{2F} & = & 2-20t_F \\ x_{3F} & = & 3-20t_F \end{matrix}$$

also:

$$\overrightarrow{FR} = \begin{pmatrix} 5 - x_{1F} \\ 1 - x_{2F} \\ 6 - x_{3F} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 - (1 + 10t_F) \\ 1 - (2 - 20t_F) \\ 6 - (3 - 20t_F) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 10t_F \\ -1 + 20t_F \\ 3 + 20t_F \end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{FR}| = \sqrt{(4 - 10t_F)^2 + (-1 + 20t_F)^2 + (3 + 20t_F)^2} =$$

$$\sqrt{4 - 80t_F + 100t_F^2 + 1 - 40t_F + 400t_F^2 + 9 + 120t_F + 400t_F^2} =$$

$$\sqrt{14 + 900t_F^2}$$

Wann wird dieser Wert minimal ?

Für  $t_F = 0$  !