

Name, Vorname:

Hilfsmittel:
keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß in DRUCKSCHRIFT auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

Bemerkung:

Taschenrechner dürfen nicht verwendet werden!!!

AUFGABEN

1) Lösen Sie die Gleichung $r^x = s$ (wobei $r > 0$, $r \neq 1$, $s > 0$) auf nach:

- a) x 1P
- b) r 1P

2) Berechnen Sie:

- a) $\ln e^7$ 1P
- b) $\ln 1$ 1P
- c) $\ln e$ 1P

3) Formen Sie in möglichst einfache Terme um (falls dies nicht möglich ist, schreiben sie "keine Umformung möglich"):

- a) $\log_{10}(a \cdot a)$ 2P
- b) $\ln(x - y)$ 2P
- c) $\ln\left(\frac{1}{e^2}\right)$ 2P
- d) $\log_a 1$ 1P
- e) $\log_a a$ 1P
- f) $\log_a a^x$ 2P
- g) $\log_a ((a^n)^m)$ 3P
- h) $\log_a \frac{a^n}{a^m}$ 3P

Lösungen:

1)

a) $x = \log_r s$

b) $r = \sqrt[x]{s} = s^{1/x}$

2)

a) $\ln e^7 = \log_e e^7 = 7$

b) $\ln 1 = \log_e 1 = 0$

c) $\ln e = \log_e e = 1$

3)

a) $\log_{10}(a \cdot a) = \log_{10} a^2 = 2 \log_{10} a$

b) $\ln(x - y)$ "keine Umformung möglich"

c) $\ln\left(\frac{1}{e^2}\right) = \ln(e^{-2}) = -2 \ln e = -2$

d) $\log_a 1 = 0$

e) $\log_a a = 1$

f) $\log_a a^x = x$

g) $\log_a ((a^n)^m) = \log_a (a^{nm}) = nm \cdot \log_a a = nm$

h) $\log_a \frac{a^n}{a^m} = \log_a a^{n-m} = (n-m) \log_a a = n-m$

Kurztest 1 Mathematik 1 2BK11 Nachtermin Zeit: 15 Minuten*Name, Vorname:*

Hilfsmittel:

keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß in DRUCKSCHRIFT auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punktabzug !!!!

AUFGABEN1) 13Pa) Geben Sie die exakte Definition (mit Limes) der eulerschen Zahl e an und zusätzlich noch den angenäherten Wert.

b) Ein Kapital von 1000 Euro wird 3 Jahre zu einem Jahreszins von 100% angelegt.

Wie groß ist das Endkapital, wenn man die Zinsen auf der Bank gelassen hat (Zinsezins) ?

c) 2^{34} soll ungefähr als Zehnerpotenz angegeben werden, also $2^{34} \approx 10^n$ Bestimmen Sie das n , wobei $2^{10} \approx 10^3$ ist.d) Bestimmen Sie die Lösungsmenge von: $2^n = 4^n$ 2) 10P

Formen Sie in möglichst einfache Terme um (falls dies nicht möglich ist, schreiben sie "keine Umformung möglich"):

a) $\log_b 1000 + \log_b 100 =$

b) $n \log_n \sqrt[n]{n} =$

c) $\log_b (x^2 - y^2) - \log_b (x - y)^2 =$

3) 18P

Gelten folgende Behauptungen? Wenn ja, beweisen Sie diese.

a) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

b) $\sqrt[n]{z^m} = (\sqrt[n]{z})^m$

c) $\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$

d) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

e) $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

f) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$

Lösungen:

1)

$$\text{a) } e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad 3\text{P}$$

$$\text{b) } 8000 \text{ Euro} \quad 3\text{P}$$

$$\text{c) } 2^{30} = 2^{10 \cdot 3} = (2^{10})^3 \approx (10^3)^3 = 10^9 \quad 4\text{P}$$

$$\text{d) } L = \{0\} \quad 3\text{P}$$

2)

$$\text{a) } \log_b 1000 + \log_b 100 = \log_b (1000 \cdot 100) = \log_b (100000) \quad 2\text{P}$$

$$\text{b) } n \cdot \log_n \sqrt[n]{n} = n \cdot \log_n n^{1/n} = \log_n (n^{1/n})^n = \log_n n = 1 \quad 4\text{P}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \log_b (x^2 - y^2) - \log_b (x - y)^2 &= \log_b [(x - y) \cdot (x + y)] - 2 \log_b (x - y) = \\ \log_b (x - y) + \log_b (x + y) - 2 \log_b (x - y) &= \log_b (x + y) - \log_b (x - y) \end{aligned} \quad 4\text{P}$$

3)

Gelten folgende Behauptungen? Wenn ja, beweisen Sie diese.

$$\text{a) } a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1^n}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n \quad 3\text{P}$$

$$\text{b) } (\sqrt[n]{z})^m = (z^{\frac{1}{n}})^m = z^{\frac{1}{n} \cdot m} = z^{\frac{m}{n}} \quad 3\text{P}$$

$$\text{c) } \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a} \cdot 1}{\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a} \quad 2\text{P}$$

$$\text{d) } \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^1} \cdot \sqrt[n]{b^1} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{(ab)^1} = \sqrt[n]{ab} \quad 3\text{P}$$

$$\text{e) } \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \frac{\sqrt[n]{a^1}}{\sqrt[n]{b^1}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad 3\text{P}$$

$$\text{f) } \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m]{a^{\frac{1}{n}}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{nm}} = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^{\frac{1}{m}}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} \quad 4\text{P}$$

Name, Vorname:

Hilfsmittel:
keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben. Wenn nötig, Zeichnung machen.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß in DRUCKSCHRIFT auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

AUFGABEN

1) 2P
Geben Sie ein Schaubild an, das zu keiner Funktion gehört.

2) 2P
Gegeben sind die folgenden unendlich vielen Punkte, die im 2-dimensionalen Koordinatensystem liegen:
 $P_1(0,0)$, $P_2(1,1)$ $P_3(2,2)$, $P_4(3,3)$, $P_5(4,4)$, ...
 $Q_1(1,-1)$, $Q_2(2,-2)$ $Q_3(3,-3)$, $Q_4(4,-4)$, $Q_5(5,-5)$, ...
Gibt es eine Funktion, auf deren Schaubild alle obigen Punkte liegen? (mit Begründung!)
Wenn ja, bitte dazugehörige Funktionsgleichung angeben.

3) 6P
Geben Sie die größtmögliche Definitionsmenge D und den Wertebereich W der folgenden Funktionen an:

a) $h(x) = \frac{1}{x}$

b) $g(x) = -\sqrt{-x}$

4) 2P
Gegeben ist die Funktion h mit $h(x) = x^2$ mit maximal möglichem Definitionsbereich.
Bestimmen Sie die Menge M (aufzählende Form):
 $M = \{x \in \mathbb{R} \mid h(x) = 25\}$

5) 6P
Gegeben sei die Funktion g mit $g(x) = 2x+1$
Berechnen Sie (nur Term angeben, nicht vereinfachen):
 $g(x^2)$, $g(2x)$, $g(x+1)$

6) 2P
Gegeben sei die Funktion h mit dem zugehörigen Schaubild K_h
Außerdem ist ein Punkt $Q(a \mid b)$ gegeben, der sich auf der Kurve K_h befindet.
Welche Bedingung muß dann gelten ? (mathematische Gleichung angeben).

7) 5P
 In Abhängigkeit der Zeit gilt für den Spannungsverlauf beim Aufladen eines Kondensators:

$$U = U_0 \cdot (1 - e^{-\frac{t}{RC}}); \text{ wobei } U_0 \neq 0, R \neq 0, C \neq 0$$

 Formem Sie diese Gleichung nach t um.

8) 5P
 Wie hoch muss der Jahreszinssatz sein, damit sich ein Kapital in 10 Jahren verdoppelt?
 Verwendete Unbekannte mit Worten beschreiben (wie im Unterricht).

9) 7P
 Bestimmen Sie rein rechnerisch die Lösungsmenge L der Gleichung

$$9 \cdot 3^{2x} = 3^{x+1}$$

 Probe machen ! (wenn keine rechnerische Lösung erzielt wurde, Lösung durch Probieren versuchen).

10) 13P
 Vereinfachen Sie so weit wie möglich (Termumformungen)

a) $\log_c 27 : \log_c \frac{1}{27}$

b) $2 \cdot \log_b (x^2 - c^2) - \log_b (x^2 + 2cx + c^2) - \log_b (x - c)^2$

c) $a^{-2 \log_a x}$

Lösungen

1) 2P
 Z.B das X in ein Koordinatensstem einzeichnen.

2) 2P

Zum x-Wert 1 gehören z.B. die 2 y-Werte 1 und -1, also keine Funktion.

3) 6P

a) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $W = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

a) $D = \{x \mid$

$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$ und $W = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 0\}$

4) 2P

$M = \{5; -5\}$

5) 6P

$g(x^2) = 2x^2 + 1$

$g(2x) = 2 \cdot 2x + 1$

$g(x+1) = 2(x+1) + 1$

6) 2P

$h(a) = b$

7) 5P

$U(t) = U_0 \cdot (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \mid : U_0$

$1 - e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{U}{U_0} \mid -1$

$-e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{U}{U_0} - 1 \mid \cdot (-1)$

$e^{-\frac{t}{RC}} = -\frac{U}{U_0} + 1$

$-\frac{t}{RC} = \log_e\left(-\frac{U}{U_0} + 1\right) = \ln\left(1 - \frac{U}{U_0}\right)$

$t = -RC \cdot \ln\left(1 - \frac{U}{U_0}\right)$

8) 5P

Das Anfangskapital ist K_0 und das Kapital nach 10 Jahren ist K_{10}

Für das Kapital nach 10 Jahren gilt: $K_{10} = 2 \cdot K_0$. Also:

$K_{10} = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p_1}{100}\right)^{10}$

$K_{10} = 2 \cdot K_0$

also:

$2K_0 = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p_1}{100}\right)^{10} \iff \left(1 + \frac{p_1}{100}\right)^{10} = 2 \iff 1 + \frac{p_1}{100} = \sqrt[10]{2} \iff p_1 = (\sqrt[10]{2} - 1) \cdot 100$

$p_1 \approx 7,17\%$

9) 7P

$$9 \cdot 3^{2x} = 3^{x+1} \quad D = R$$

1. Lösung :

$$9 = \frac{3^{x+1}}{3^{2x}} \Leftrightarrow 9 = 3^{x+1-2x} \Leftrightarrow 9 = 3^{-x+1} \Leftrightarrow$$

$$-x+1 = \log_3 9 \Leftrightarrow x = 1 - \log_3 9 \Leftrightarrow$$

$$x = 1 - 2 \Leftrightarrow x = -1$$

2. Lösung :

$$\ln(9 \cdot 3^{2x}) = \ln(3^{x+1}) \Leftrightarrow \ln 9 + \ln 3^{2x} = (x+1) \ln 3 \Leftrightarrow$$

$$\ln 9 + 2x \ln 3 = x \ln 3 + \ln 3 \Leftrightarrow x \ln 3 = \ln 3 - \ln 9 \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{\ln 3 - \ln 9}{\ln 3} \Leftrightarrow x = \frac{\ln(1/3)}{\ln 3} = \frac{\ln 3^{-1}}{\ln 3} = \frac{-1 \cdot \ln 3}{\ln 3} \Leftrightarrow$$

$$x = -1$$

$$L = \{-1\}$$

Probe: 2P

$$9 \cdot 3^{2 \cdot (-1)} = 3^{-1+1} \Leftrightarrow 9 \cdot 3^{-2} = 3^0 \Leftrightarrow 9 \cdot \frac{1}{9} = 1 \Leftrightarrow 1 = 1 \text{ (wahr)}$$

10)

13P

a) 5P

$$\log_c 27 : \log_c \frac{1}{27} = \frac{\log_c 27}{\log_c \frac{1}{27}} = \frac{\log_c 27}{\log_c 1 - \log_c 27} = \frac{\log_c 27}{0 - \log_c 27} = \frac{\log_c 27}{-\log_c 27} = -1$$

b) 5P

$$2 \cdot \log_b (x^2 - c^2) - \log_b (x^2 + 2cx + c^2) - \log_b (x - c)^2 =$$

$$2 \cdot \log_b ((x - c)(x + c)) - \log_b (x + c)^2 - \log_b (x - c)^2 =$$

$$2 \cdot (\log_b (x - c) + \log_b (x + c)) - 2 \log_b (x + c) - 2 \log_b (x - c) =$$

$$2 \log_b (x - c) + 2 \log_b (x + c) - 2 \log_b (x + c) - 2 \log_b (x - c) = 0$$

c) 3P

$$a^{-2 \log_a x} = (a^{\log_a x})^{-2} = x^{-2}$$

KLAUSUR 1 Mathematik 2 2BK11 Nachtermin 1 Zeit: 60 Minuten

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß in DRUCKSCHRIFT auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

AUFGABEN

1) 5P
Herr A legt sein Kapital K_0 zum Jahreszinssatz p insgesamt n Jahre lang an (mit Zinseszins).
Herr B legt sein Kapital K_0 zum Jahreszinssatz p insgesamt $2n$ Jahre lang an (mit Zinseszins).
Um das Wievielfache hat sich das Kapital von Herr B gegenüber dem Kapital von Herr A vervielfacht ?

2) 21P
Bestimmen Sie rein rechnerisch die Lösungsmenge L der folgenden Gleichungen:

a)

$$5 \cdot 5^x + 5^{-x} = 6$$

b)

$$\log_2(x-3) - \log_2(x^2-9) + 2 = 0$$

3)

$$4 \cdot 5^{x-1} = 10^{x+1}$$

3) 8P
Vereinfachen Sie so weit wie möglich (Termumformungen wie im Unterricht)

$$\log_p \sqrt{\frac{4a^3 \cdot \sqrt{p}}{b^5 \cdot q^7}}$$

4)

Gelten folgende Behauptungen? Wenn ja, beweisen Sie diese.

a) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

b) $\sqrt[n]{z^m} = (\sqrt[n]{z})^m$

c) $\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$

d) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

e) $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

f) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$

Lösungen:

2)

a)

$$5 \cdot 5^x + 5^{-x} = 6 \quad D = \mathbb{R}$$

$$\text{setze: } u = 5^x \quad (\neq 0) \Leftrightarrow$$

$$5 \cdot u + \frac{1}{u} = 6 \Leftrightarrow 5 \cdot u^2 + 1 = 6u \Leftrightarrow 5 \cdot u^2 - 6u + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$u_1 = 1; u_2 = 1/5 \Leftrightarrow 5^{x_1} = 1; 5^{x_2} = 1/5 \Leftrightarrow$$

$$x_1 = 0; x_2 = -1$$

b)

$$\log_2(x-3) - \log_2(x^2-9) + 2 = 0 \quad D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\} \Leftrightarrow$$

$$\log_2 \frac{x-3}{x^2-9} + 2 = 0 \Leftrightarrow \log_2 \frac{1}{x+3} + 2 = 0 \Leftrightarrow \log_2(x+3)^{-1} + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$-\log_2(x+3) + 2 = 0 \Leftrightarrow \log_2(x+3) = 2 \Leftrightarrow \log_2(x+3) = 2 \Leftrightarrow$$

$$x+3 = 2^2 \Leftrightarrow x = 1 \quad (\text{keine Lösung})$$

c)

$$4 \cdot 5^{x-1} = 10^{x+1} \quad D = \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$4 \cdot \frac{5^x}{5} = 10^x \cdot 10 \Leftrightarrow \frac{10^x}{5^x} = \frac{4}{50} \Leftrightarrow \left(\frac{10}{5}\right)^x = \frac{4}{50} \Leftrightarrow$$

$$2^x = \frac{4}{50} \Leftrightarrow x = \log_2 \frac{4}{50} \Leftrightarrow x = \frac{\ln \frac{4}{50}}{\ln 2} \approx -3,64$$

3)

$$\log_p \sqrt{\frac{4a^3 \cdot \sqrt{p}}{b^5 \cdot q^7}} = \log_p \left(\frac{4a^3 \cdot \sqrt{p}}{b^5 \cdot q^7} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_p \frac{4a^3 \cdot \sqrt{p}}{b^5 \cdot q^7} =$$

$$\frac{1}{2} (\log_p (4a^3 \cdot \sqrt{p}) - \log_p (b^5 \cdot q^7)) = \frac{1}{2} (\log_p (4a^3) + \log_p \sqrt{p} - \log_p b^5 - \log_p q^7) =$$

$$\frac{1}{2} \left(\log_p 4 + \log_p a^3 + \log_p p^{\frac{1}{2}} - 5 \log_p b - 7 \log_p q \right) =$$

$$\frac{1}{2} \log_p 4 + \frac{1}{2} \log_p a^3 + \frac{1}{2} \log_p p^{\frac{1}{2}} - \frac{5}{2} \log_p b - \frac{7}{2} \log_p q =$$

$$\frac{1}{2} \log_p 2^2 + \frac{3}{2} \log_p a + \frac{1}{2} \log_p p^{\frac{1}{2}} - \frac{5}{2} \log_p b - \frac{7}{2} \log_p q =$$

$$\log_p 2 + \frac{3}{2} \log_p a + \frac{1}{4} - \frac{5}{2} \log_p b - \frac{7}{2} \log_p q$$

4)

$$\text{a) } a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1^n}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n \quad 3\text{P}$$

$$\text{b) } (\sqrt[n]{z})^m = (z^{\frac{1}{n}})^m = z^{\frac{1}{n} \cdot m} = z^{\frac{m}{n}} \quad 3\text{P}$$

$$\text{c) } \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a} \cdot 1}{\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a} \quad 2\text{P}$$

$$\text{d) } \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^1} \cdot \sqrt[n]{b^1} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{(ab)^1} = \sqrt[n]{ab} \quad 3\text{P}$$

$$\text{e) } \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \frac{\sqrt[n]{a^1}}{\sqrt[n]{b^1}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad 3\text{P}$$

$$\text{f) } \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m]{a^{\frac{1}{n}}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{nm}} = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^{\frac{1}{m}}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} \quad 4\text{P}$$

Name, Vorname:

Hilfsmittel:
Taschenrechner

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben. Wenn nötig, Zeichnung machen.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß in DRUCKSCHRIFT auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

AUFGABEN

Bemerkung:

Wo nötig, selbst eingeführte Variablen (wie im Unterricht) mit Worten bezeichnen (für was stehen diese) und Lösung mit Worten kommentieren bzw. begründen (wie im Unterricht).

- 1) 5P
- a) Geben Sie die Funktionsgleichung einer Geraden K_{f1} an, die senkrecht zu einer Geraden mit der Steigung $m = 3$ ist.
- b) Geben Sie die Funktionsgleichung einer Geraden K_{f2} an, die durch den 4. Quadranten geht.
- c) Geben Sie die Funktionsgleichung einer Geraden K_{f3} an, die die Steigung $m = -2$ hat und durch den Punkt $P(0 | 5)$ geht.
- d) Geben Sie die Funktionsgleichung einer Geraden K_{f4} an, die durch die 2 Punkte $P(4 | 0)$ und $Q(-2 | 0)$ geht.
- e) Geben Sie die Gleichung einer Geraden an, die durch die 2 Punkte $P(-4 | -4)$ und $Q(-4 | 4)$ geht.
- 2) 10P
- a) Geben Sie die Funktionsgleichung der Geraden K_g an, die durch die 2 Punkte $P(3 | -2)$ und $Q(-4 | 12)$ geht. Benutzen Sie dazu nur die ZPF (andere Lösungen werden nicht bewertet).
- b) Geben Sie die Funktionsgleichung der Geraden K_h an, die durch den Punkt $P(-7 | -22)$ geht und die Steigung $m = -3$ hat.
Benutzen Sie dazu die nur PSF (andere Lösungen werden nicht bewertet).
- 3) 6P
- Liegen die Punkte $P(6|3)$ $Q(-3| -3)$ und $R(30|17)$ auf einer Geraden?
Geben Sie eine mathematische Begründung (Berechnung)!
- 4) 10P
- Bestimmen Sie rein rechnerisch die Lösungsmenge L der folgenden Gleichungen:
- $$7 \cdot 6^{2x} = 11^{x+3}$$

5)

9P

Herr X legt sein Anfangskapital A zu 5% Jahreszins insgesamt d Jahre an.

Herr Y legt die Hälfte davon, also A/2 auch zu 5% dafür aber doppelt so lange an wie Herr X.

Wie groß muß die Zeitdauer d sein, damit sie dann das gleiche Endkapital E haben ?

(Mit Zinseszins rechnen).

6)

12P

Gelten folgende Behauptungen? Mit ja oder nein antworten!

Wenn ja, beweisen Sie diese.

Z = Menge aller ganzen Zahlen

$$a) \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$$

für **alle** $a > 0, b > 0$

$$b) \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

für **alle** $a > 0, b > 0, n > 0, n \in \mathbb{Z}, m > 0, m \in \mathbb{Z}$

$$c) \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

für **alle** $a > 0, b > 0, n > 0, n \in \mathbb{Z}$

$$d) \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$$

für **alle** $a > 0, b > 0, n > 0, n \in \mathbb{Z}, m > 0, m \in \mathbb{Z}$

Lösungen:

1)

5P

a) $f_1(x) = -1/3x$

b) $f_2(x) = -2x$

c) $f_3(x) = 5-2x$

d) $f_4(x) = 0$

e) $x = -4$

2)

10P

a) ZPF:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y - (-2)}{x - 3} = \frac{12 - (-2)}{-4 - 3} \Leftrightarrow \frac{y + 2}{x - 3} = -2 \Leftrightarrow y + 2 = -2(x - 3) \Leftrightarrow y + 2 = -2x + 6 \Leftrightarrow$$

$$y = -2x + 4$$

b) PSF:

$$\frac{y - (-22)}{x - (-7)} = -3 \Leftrightarrow \frac{y + 22}{x + 7} = -3 \Leftrightarrow y + 22 = -3(x + 7) \Leftrightarrow y + 22 = -3x - 21 \Leftrightarrow$$

$$y = -3x - 43$$

3)

6P

Steigung m_1 der Geraden durch P und Q

$$m_1 = \frac{-3 - 3}{-3 - 6} = \frac{2}{3}$$

Steigung m_2 der Geraden durch P und R

$$m_1 = \frac{17 - 3}{30 - 6} = \frac{14}{24} = \frac{7}{12}$$

Da $m_1 \neq m_2$ liegen die Punkte nicht auf einer Geraden

4)

10P

$$7 \cdot 6^{2x} = 11^{x+3} \quad D = R \Leftrightarrow$$

$$7 \cdot (6^2)^x = 11^x \cdot 11^3 \Leftrightarrow 7 \cdot 36^x = 11^x \cdot 11^3 \Leftrightarrow$$

$$\frac{36^x}{11^x} = \frac{11^3}{7} \Leftrightarrow \left(\frac{36}{11}\right)^x = \frac{11^3}{7} \Leftrightarrow x = \log_{36/11} \frac{11^3}{7} \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{\ln \frac{11^3}{7}}{\ln(36/11)} \approx 4,43$$

5)

9P

Das Endkapital E beträgt bei $q = 1,05$ einerseits

$E = A \cdot q^d$ und andererseits:

$$E = A/2 \cdot q^{2d}$$

Also gilt:

$$A \cdot q^d = A/2 \cdot q^{2d} \Leftrightarrow 2q^d = q^{2d} \Leftrightarrow 2 = \frac{q^{2d}}{q^d} \Leftrightarrow 2 = q^{2d-d}$$

$$\Leftrightarrow 2 = q^d \Leftrightarrow d = \log_q 2 = \log_{1,05} 2 = \ln 2 / \ln 1,05 \approx 14,21$$

5)

12P

$$\text{a) } \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a} \cdot 1}{\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$$

2P

$$\text{b) } \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^1} \cdot \sqrt[n]{b^1} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{(ab)^1} = \sqrt[n]{ab}$$

3P

$$\text{c) } \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \frac{\sqrt[n]{a^1}}{\sqrt[n]{b^1}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

3P

$$\text{d) } \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m]{a^{\frac{1}{n}}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{nm}} = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^{\frac{1}{m}}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$$

4P

Name, Vorname:

Hilfsmittel:
keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben. Wenn nötig, Zeichnung machen.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß in DRUCKSCHRIFT auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

AUFGABEN

1) 8P

a) 4P

In Abhängigkeit der Zeit t gilt für die Spannung U

$$U(t) = U_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right); \quad \text{wobei } U_0 > 0, R > 0, C > 0$$

Bestimmen Sie (mit Begründung)

$$\lim_{\Delta x \rightarrow \infty} U$$

b) 4P

Skizzieren Sie das Schaubild der Funktion für

$$U_0 = 1, R = 1, C = 1$$

2) 12P

gegeben ist die Funktion h mit: $h(x) = e^x$

a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Tangente(n) t im Punkt $P(2 | ?)$

b) Bestimmen den Schnittpunkt S dieser Tangente(n) mit der x -Achse.

3) 6P

Geben Sie die Exponentialfunktion der Form

$$f(x) = c \cdot a^x \quad (a > 0)$$

an, die durch die folgenden Punkte geht:

$$P(0|4), Q(2|1)$$

4) 13P

Von einer radioaktiven Substanz sind nach einer Stunde noch 400 mg, nach 2 Stunden noch 300 mg vorhanden. Wie groß sind m_0 und q ?

Benutzen Sie dazu das Zerfallsgesetz:

$$m(t) = m_0 \cdot q^t \quad (t \text{ in Stunden, } m \text{ in mg})$$

5) 13P

Legen Sie von $P(1 \mid 0)$ aus die Tangente(n) an das Schaubild K_h der Funktion mit der Funktionsgleichung:

$$h(x) = e^{2x+1}$$

Bestimmen Sie die bzw. den Berührungspunkt(e) und die Funktionsgleichungen der Tangente(n).

Lösungen:

1)

8P

Es gilt:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow \infty} e^{-\frac{t}{RC}} = 0 \implies \lim_{\Delta x \rightarrow \infty} (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) = 1 \implies \lim_{\Delta x \rightarrow \infty} U_0 \cdot (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) = U_0 \implies \lim_{\Delta x \rightarrow \infty} U = U_0$$

2)

12P

a) 8P

$$h(x) = e^x$$

$$h'(x) = e^x$$

Die y-Koordinate im Punkt P(2 | ?) beträgt: $h(2) = e^2$

Die Steigung im Punkt P(2 | ?) beträgt: $h'(2) = e^2$

Nach der PSF gilt:

$$\frac{y - e^2}{x - 2} = e^2 \iff y - e^2 = e^2(x - 2) \iff y - e^2 = e^2x - 2e^2 \iff y = e^2x - e^2, \text{ also:}$$

$$t: y = e^2x - e^2$$

b) 4P

Der Schnittpunkt sei $S(x_s | 0)$. Dort gilt:

$$0 = e^2x_s - e^2 \iff 0 = e^2(x_s - 1) \iff x_s - 1 = 0 \iff x_s = 1, \text{ also:}$$

$$S(1 | 0)$$

3)

6P

Punktprobe für $P \in K_f$ und $Q \in K_f$ ergibt:

$$4 = c \quad (G11)$$

$$1 = c \cdot a^2 \quad (G12)$$

daraus folgt:

$$c = 4 \text{ und } c = 1/a^2 \text{ also (gleichsetzen): } 4 = \frac{1}{a^2}$$

damit:

$$a^2 = \frac{1}{4}, \text{ also (da } a > 0): a = \frac{1}{2} \text{ und } c = 4$$

4)

13P

Für das Wachstumsgesetz gilt:

gegeben:

$$m(t) = m_0 \cdot q^t \quad (t \text{ in Stunden, } m \text{ in mg})$$

gesucht:

q und m_0

Nach 1 h sind noch 400 mg vorhanden, also:

$$m(1) = 400 \text{ und } m(1) = m_0 \cdot q^1$$

damit:

$$400 = m_0 \cdot q^1 \text{ bzw. vereinfacht:}$$

$$(G1) \quad 400 = m_0 \cdot q$$

Nach 2 h sind noch 300 mg vorhanden, also:

$$m(2) = 300 \text{ und } m(2) = m_0 \cdot q^2$$

damit:

$$(G2) \quad 300 = m_0 \cdot q^2$$

Man hat also 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten. Jeweils auflösen nach m_0 :

$$m_0 = \frac{400}{q}$$

$$m_0 = \frac{300}{q^2}$$

gleichsetzen ergibt:

$$\frac{400}{q} = \frac{300}{q^2} \quad | \cdot q^2$$

$$400 q = 300$$

ergibt:

$$q = 3/4 \text{ und}$$

$$m_0 = \frac{400}{q} = \frac{400}{0,75} = \frac{1600}{3}$$

Damit:

$$m(t) = \frac{1600}{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^t$$

Probe machen !!

5)

13P

a) 10P

$$h'(x) = 2e^{2x+1}$$

a) Der gesuchte Berührungspunkt sei $B(x_B, y_B)$.

Es gilt:

$$\frac{h(x_B) - 0}{x_B - 0} = h'(x_B) \quad (\text{TB})$$

Es gilt aber:

$$h(x_B) = e^{2x_B+1} \text{ und } h'(x_B) = 2e^{2x_B+1}$$

Setze dies in (TB) ein. Das ergibt dann:

$$\frac{e^{2x_B+1} - 0}{x_B - 1} = 2e^{2x_B+1}$$

$$\frac{e^{2x_B+1}}{x_B - 1} = 2e^{2x_B+1} \iff \frac{1}{x_B - 1} = 2 \iff x_B - 1 = \frac{1}{2} \iff x_B = 1,5$$

$$y_B = h(1,5) = e^{2 \cdot 1,5 + 1} = e^4$$

also: $B(1,5 | e^4)$

b) 3P

Funktionsgleichung der Tangente:

$$\frac{y - 0}{x - 1} = \frac{e^4 - 0}{1,5 - 1} \iff \frac{y}{x - 1} = \frac{e^4}{0,5} \iff \frac{y}{x - 1} = 2e^4 \iff y = 2e^4(x - 1) \iff y = 2e^4x - 2e^4$$

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß in DRUCKSCHRIFT auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

AUFGABEN1) 10PFür welche Winkel x zwischen -2π und 3π gilt: (Probe machen)

$$\sin x = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

$$\text{Bemerkung: } \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

2) 10P

a) Berechnen Sie mathematisch:

$$\int_0^{2\pi} \sin(x) dx =$$

b) Begründen Sie das Ergebnis verbal

3) 15P

Welche des folgenden Aussagen gelten (mathematisch begründen)?

a) $\cos x = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

b) $\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

c) $\sin(x - x_0) = -\sin(x_0 - x)$

4) 5PBilden Sie die 1. Ableitung von $h(x)$.

$$h(x) = 4 \sin(5x-6) + 7$$

5) 12PBestimmen Sie A , p , y_0 , $x_{\min R}$, $x_{\min L}$ der Kurve K_f mit der Funktionsgleichung:

$$f(x) = -4 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}(x - 13\pi)\right) - 9$$

Lösung:

1)

$$\text{c) } x_1 = 15^\circ, \quad x_2 = 180^\circ - 15^\circ = 165^\circ, \quad x_3 = 360^\circ + 15^\circ = 375^\circ, \quad x_4 = 540^\circ - 15^\circ = 525^\circ \\ x_5 = -180^\circ - 15^\circ = -195^\circ, \quad x_6 = -360^\circ + 15^\circ = -345^\circ,$$

2)

$$\text{a) } \int_0^{2\pi} \sin(x) dx = [-\cos(x)]_0^{2\pi} = -\cos(2\pi) - (-\cos(0)) = -\cos(2\pi) + \cos(0) = -1 + 1 = 0$$

3)

$$\text{a) } \cos 0 = \sin(-\pi/2) \quad \text{c) } \sin(x - x_0) = \sin(-(x_0 - x)) = -\sin(x_0 - x)$$

$$1 = -1 \text{ falsch}$$

$$\text{b) } \sin \pi/2 = \cos(\pi)$$

$$1 = -1 \text{ falsch}$$

4)

$$h'(x) = 20 \cos(5x-6)$$

5)

$$A = |-4| = 4 \quad p = \frac{2\pi}{1/2} = 4\pi \quad y_0 = -9$$

$$f(x) = -4 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}(x - 13\pi)\right) - 9 = -4 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}(x + 12\pi - 13\pi)\right) - 9 = -4 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}(x - \pi)\right) - 9$$

$$= -4 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}(x + 4\pi - \pi)\right) - 9 = -4 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}(x + 3\pi)\right) - 9$$

$$x_{\min R} = \pi$$

$$x_{\min L} = 3\pi$$

*Name, Vorname:*Hilfsmittel:
keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben. Wenn nötig, Zeichnung machen.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß in DRUCKSCHRIFT auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

AUFGABEN

Bemerkungen:

Als Taschenrechnerersatz gibt es folgende Infos:

$$\cos(30^\circ) = \sqrt{3}/2 \quad \sin(30^\circ) = 1/2$$

$$\cos(45^\circ) = \sqrt{2}/2 \quad \sin(45^\circ) = \sqrt{2}/2$$

$$\cos(60^\circ) = 1/2 \quad \sin(60^\circ) = \sqrt{3}/2 \quad \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

1) 5PFür welche Winkel x zwischen -2π und 3π gilt:

$$\sin(x) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

Achtung: Gesuchte Winkel im Gradmaß angeben als Lösungsmenge angeben!

2) 4P

gegeben: Sinuskurve mit der Funktionsgleichung $g(x) = a \cdot \sin(k(x - x_0)) + y_0$ mit $k > 0$
gesucht: Abstand b (bzgl. der x -Richtung) von einem Wendepunkt und einem nächsten Extrempunkt

3) 6P

gegeben:

Funktion f mit Funktionsgleichung $f(x) = \sin(x)$ K_g ist achsensymmetrisch (bzgl. der x -Achse) zu K_f K_h entsteht durch Verschiebung der Kurve K_g um $-\frac{\pi}{2}$ in x -Richtung.

gesucht:

Funktionsgleichung der Kurven K_g und K_h 4) 10Pa) Berechnen Sie mathematisch für $k > 0$:

$$\int_0^{2\pi/k} \cos(kx) dx$$

b) Ermitteln Sie rein anschaulich (ohne Rechnung) das Ergebnis. Begründen Sie!

5)

6P

gegeben ist die Funktion h mit der Funktionsgleichung

$$h(x) = 4 \sin(5x-6) + 7$$

a) Bilden Sie die 1. Ableitung von $h(x)$.

b) Bestimmen Sie $\int h(x) dx$

6)

8P

Gegeben sind die zwei Funktionen mit den folgenden Funktionsgleichungen:

$$f(x) = \sin(x) \quad \text{und} \quad h(x) = \cos(x)$$

Berechnen Sie die Fläche zwischen den Schaubildern K_f , K_h und den Geraden mit den Gleichungen $x = \pi/2$ und $x = \pi$

7)

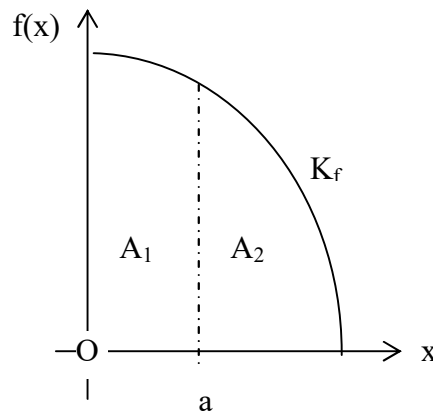
8P

Gegeben ist die Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x) = \cos(x)$

Bestimmen Sie den Wert von a so, daß die Flächen A_1 und A_2 gleich groß werden.

Exakten Wert von a angeben!

Skizze von K_f :



8)

5P

Gegeben sind die zwei Funktionen mit den folgenden Funktionsgleichungen:

$$f(x) = \sin(x) \quad \text{und} \quad h(x) = e^x$$

Geben Sie die Punkte an, die gleichzeitig auf K_f und K_h liegen und in denen auch die Steigung gleich groß ist.

Lösungen:

1) 5P

c) $x_1 = 15^\circ$, $x_2 = 180^\circ - 15^\circ = 165^\circ$, $x_3 = 360^\circ + 15^\circ = 375^\circ$, $x_4 = 540^\circ - 15^\circ = 525^\circ$
 $x_5 = -180 - 15^\circ = -195^\circ$, $x_6 = -360^\circ + 15^\circ = -345^\circ$,
 $L = \{15^\circ, 165^\circ, 375^\circ, 525^\circ, -195^\circ, -345^\circ\}$

2) 4P

$$b = \frac{\frac{2\pi}{k}}{4} = \frac{\pi}{2k}$$

3) 6P

$$g(x) = -\sin(x)$$

$$h(x) = \sin(x + \pi/2)$$

4) 10P

$$\int_0^{2\pi/k} \cos(kx) dx = \left[\frac{1}{k} \sin(kx) \right]_0^{2\pi/k} = \frac{1}{k} \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{k}\right) - \frac{1}{k} \sin(0) = \frac{1}{k} \sin(2\pi) - \frac{1}{k} \sin(0) = 0$$

Anschaulich: $\cos(kx)$ hat die Periode $2\pi/k$. Deshalb sind gleich viele Teile unterhalb und oberhalb der Kurve.

5) 6P

a) $h'(x) = 20 \cos(5x-6)$

b) $\int h(x) dx = \int (4 \sin(5x-6) + 7) dx = -4/5 \cdot \cos(5x-6) + 7x + C$

6) 8P

$$A = \int_{\pi/2}^{\pi} (\text{Oberkurve} - \text{Unterkurve}) dx =$$

$$\int_{\pi/2}^{\pi} (\sin(x) - \cos(x)) dx = [-\cos(x) - \sin(x)]_{\pi/2}^{\pi} = -\cos(\pi) - \sin(\pi) - (-\cos(\pi/2) - \sin(\pi/2)) = -(-1) - 0 - (-0 - 1) = 1 + 1 = 2$$

7) 8P

$$\int_0^a (\cos(x)) dx = \int_a^{\pi} (\cos(x)) dx \iff [\sin(x)]_0^a = [\sin(x)]_a^{\pi/2} \iff$$

$$\sin(a) - \sin(0) = \sin(\pi/2) - \sin(a) \iff \sin(a) - \sin(0) = \sin(\pi/2) - \sin(a) \iff$$

$$\sin(a) - 0 = 1 - \sin(a) \iff 2 \sin(a) = 1 \iff \sin(a) = 1/2 \iff a = \pi/6$$

8) 5P

$$h'(x) = e^x$$

$$f'(x) = \cos(x)$$

Die Punkte werden mit $P(x_s | y_s)$ bezeichnet. Für sie gilt:

$$h'(x_s) = e^{x_s} = 1 \implies x_s = 0, \text{ also kann es höchstens der Punkt } P(0 | 1) \text{ sein.}$$

Da gilt: $f'(x_s) = \cos(x_s) = \cos(0) = 1$, ist $P(0 | 1)$ der einzige Punkt mit dieser Eigenschaft.

Name, Vorname:

Hilfsmittel:
keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß in DRUCKSCHRIFT auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punktabzug !!!!

AUFGABEN

1) 26P

a) Wie heißt die Funktionsgleichung der Ursprungsgeraden, die das Schaubild K_h der Funktion mit der Funktionsgleichung:

$$h(x) = e^{kx} \quad k \in \mathbb{R}$$

berührt ?

Geben Sie den Berührungspunkt an.

b) Berechnen Sie die Fläche A zwischen dieser Ursprungsgerade, K_h und der y -Achse im 1. Quadranten.

c) Gegen welchen Wert strebt A , wenn k gegen unendlich strebt?

Machen Sie sich dies auch anschaulich klar, indem Sie für k einen großen Wert nehmen und sich dann vorstellen, wie die Kurve aussieht.

2) 16P

Gegeben sind die zwei Funktionen mit den folgenden Funktionsgleichungen:

$$f(x) = \sin(x) \quad \text{und} \quad h(x) = e^{x-\pi} - 1$$

a) Der Schnittpunkt von K_f und K_h im 1. Quadranten ist $S(\pi | 0)$.

Beweisen oder widerlegen Sie diese Behauptung!

b) Berechnen Sie die Fläche zwischen den Schaubildern K_f , K_h und den Geraden mit den Gleichungen $x = 0$ und $x = \pi$

Exakte Werte bestimmen!

3)

8P

Gegeben ist die Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x) = \cos(x)$

Bestimmen Sie den Wert von a so, daß die Flächen A_1 und A_2 gleich groß werden.

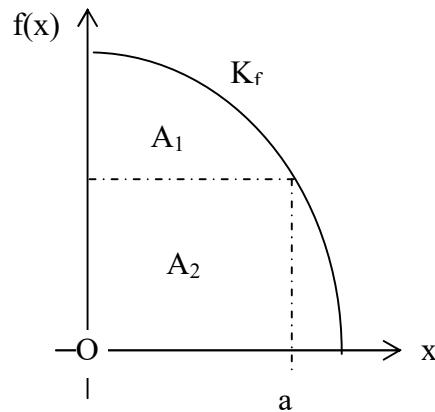
A_1 ist die Fläche zwischen der Cosinus-Kurve, der y -Achse und der Geraden mit der Funktionsgleichung $y = f(a)$

A_2 ist die Fläche zwischen der Cosinus-Kurve, der y -Achse, der x -Achse und der Geraden mit der Funktionsgleichung $y = f(a)$

Rechnen Sie so weit, bis die auftretende Gleichung nicht mehr nach a aufösbar wird.

(wie z.B. bei $\sin(a) = \cos(a)$)

Skizze von K_f :



Lösungen:

1)

a) Der gesuchte Berührungspunkt sei $B(x_B, y_B)$.

Die ZPF der Geradengleichung ergibt die sogenannte Tangentenbedingung:

$$\frac{h(x_B) - 0}{x_B - 0} = h'(x_B) \quad (\text{TB})$$

Es gilt aber:

$$h(x_B) = e^{kx_B} \text{ und } h'(x_B) = ke^{kx_B}$$

Setze dies in (TB) ein. Das ergibt dann:

$$\frac{e^{kx_B} - 0}{x_B - 0} = ke^{kx_B}$$

$$\frac{e^{kx_B}}{x_B} = ke^{kx_B} \iff \frac{1}{x_B} = k \iff x_B = \frac{1}{k}$$

$$x_B = \frac{1}{k} \text{ und } y_B = h\left(\frac{1}{k}\right) = e^{k \cdot \frac{1}{k}} = e$$

also: $B\left(\frac{1}{k} \mid e\right)$

Damit Steigung der Ursprungsgeraden:

$$m = \frac{e}{\frac{1}{k}} = ek$$

b)

$$A = \int_0^{1/k} (e^{kx} - ekx) dx = \left[\frac{e^{kx}}{k} - \frac{ekx^2}{2} \right]_0^1 = \left[\frac{e^{k \cdot \frac{1}{k}}}{k} - \frac{ek \cdot \left(\frac{1}{k}\right)^2}{2} \right] - \left[\frac{e^{k \cdot 0}}{k} - \frac{ek \cdot 0^2}{2} \right] =$$

$$\frac{e}{k} - \frac{1}{2k} - \frac{1}{k} = \frac{e}{k} - \frac{e}{2k} - \frac{1}{k} = \frac{2e - e - 2}{2k} = \frac{e - 2}{2k}$$

c)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{e - 2}{k} = 0$$

2)

a)

$$f(\pi) = \sin(\pi) = 0 \quad \text{und} \quad h(0) = e^{\pi - \pi} - 1 = e^0 - 1 = 0$$

b)

$$A = \int_0^{\pi} (\text{Oberkurve} - \text{Unterkurve}) dx =$$

$$\int_0^{\pi} (\sin(x) - (e^{x-\pi} - 1)) dx = \int_0^{\pi} (\sin(x) - e^{x-\pi} + 1) dx \left[-\cos(x) - e^{x-\pi} + x \right]_0^{\pi} =$$
$$\left[-\cos(x) - e^{x-\pi} + x \right]_0^{\pi} = -\cos(\pi) - e^{\pi-\pi} + \pi - (-\cos(0) - e^{0-\pi} + 0) =$$
$$1 - 1 + \pi - (-1 - e^{\pi}) = \pi + 1 + e^{\pi}$$

3)

$$A = \int_0^{\pi/2} (\cos(x)) dx = [\sin(x)]_0^{\pi/2} = \sin(\pi/2) - \sin(0) = 1 - 0 = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad [\sin(x)]_0^a = [\sin(x)]_a^{\pi/2}$$

$$A_1 = \int_0^a ((\cos(x) - \cos(a))) dx = [\sin(x) - \cos(a) \cdot x]_0^a = \sin(a) - \cos(a) \cdot a - (\sin(0) - \cos(a) \cdot 0) =$$

$$\sin(a) - \cos(a) \cdot a$$

Da $A_1 = A / 2$ folgt:

$$\sin(a) - \cos(a) \cdot a = 0,5$$