

Name, Vorname:

Hilfsmittel:
keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben. Wenn nötig, Zeichnung machen.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\set{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

AUFGABEN

Bemerkungen:

Lösungen wie im Unterricht, ansonsten **massiver** Punkteabzug!!

1) Geben Sie die Lösungsmenge der folgenden LGS an:

(durch direktes Ablesen aus der "Diagonalform" oder mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus):

a) 2 P

1	0	0	7
0	1	0	5
0	0	1	3

b) 3 P

1	8	1	5
-1	2	3	-3
0	0	0	6

c) 3 P

3	1	5	9
---	---	---	---

d) 3P

1	0	3	6
0	1	4	8

e) 3P

0	-3	0	-6
0	0	4	12
-2	0	0	8

2) Geben Sie die Lösungsmenge der folgenden LGS an:

(durch direktes Ablesen aus der "Diagonalform" oder mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus):

a) 4 P

6	2	4	8
---	---	---	---

b) 6 P

-2	3	1	-3
4	-6	-2	6
-6	9	3	-9

c) 5 P

-2	3	-1	4
2	-3	1	7
11	17	23	19

d) 10P

0	-1	1	1
2	1	0	4
-2	1	2	6

e) 3P

3	1	7
---	---	---

3) 9P

Zahlenrätsel (siehe Unterricht)

Bedingungen für das Zahlenrätsel:

Jeder Buchstabe muss durch eine Ziffer ersetzt werden.

Verschiedene Buchstaben entsprechen verschiedenen Ziffern.

$$\begin{array}{r}
 \times_1 \times_1 \\
 + \times_2 \times_1 \\
 \hline
 \times_1 \times_3
 \end{array}$$

a) Geben Sie das zu dem Zahlenrätsel zugehörige Gleichungssystem an und bestimmen Sie die Lösungsmenge.

b) Geben Sie eine Lösung an.

Lösungen:

1a)

$$L = \{(7;5;3)\}$$

1b)

$$L = \{\}$$

1c)

$$L = \{(x_1; x_2; x_3) \mid x_2 = 9 - 3 \cdot x_1 - 5x_3 \wedge x_1 \in \mathbb{R} \wedge x_3 \in \mathbb{R} \}$$

1d)

$$L = \{(x_1; x_2; x_3) \mid x_1 = 6 - 3 \cdot x_3 \wedge x_2 = 8 - 4 \cdot x_3 \wedge x_3 \in \mathbb{R} \}$$

1e)

x_1	x_2	x_3	b	Op	KS
0	-3	0	-6	G1	-1
0	0	4	12	G2	2
-2	0	0	8	G3	-3
0	1	0	2	G4=G1/-3	3
0	0	1	3	G5=G2/4	4
1	0	0	-4	G6=G3/-2	-3

$$L = \{(-4;2;3)\}$$

2a)

x_1	x_2	x_3	b	Op	KS
6	2	4	8	G1	20
3	1	2	4	G2=G1/2	10

$$L = \{(x_1; x_2; x_3) \mid x_2 = 4 - 3 \cdot x_1 - 2x_3 \wedge x_1 \in \mathbb{R} \wedge x_3 \in \mathbb{R} \}$$

2b)

x_1	x_2	x_3	b	Op	KS
-2	3	1	-3	G1	-1
4	-6	-2	6	G2	2
-6	9	3	-9	G3	-3
-2	3	1	-3	G4=G1	-1
0	0	0	0	G5=2G1+G2	0
0	0	0	0	G6=-3G1+G3	0

$$L = \{(x_1; x_2; x_3) \mid x_3 = -3 - 3 \cdot x_2 + 2x_1 \wedge x_1 \in \mathbb{R} \wedge x_2 \in \mathbb{R} \}$$

2c)

x_1	x_2	x_3	b	Op	KS
-2	3	-1	4	G1	4
2	-3	1	7	G2	7
11	17	23	19	G3	70
-2	3	-1	4	G4=G1	4
0	0	0	11	G5=G1+G2	11

$$L = \{\}$$

2d)

x_1	x_2	x_3	b	Op	KS
0	-1	1	1	G1	1
2	1	0	4	G2	7
-2	1	2	6	G3	7
0	-1	1	1	G4=G1	1
2	1	0	4	G5=G2	7
0	2	2	10	G6=G2+G3	14
0	-1	1	1	G7=G4	1
2	0	1	5	G8=2G4+G5	8
0	0	4	12	G9=3G4+G6	16
0	4	0	8	G10=-4G7+G9	12
-8	0	0	-8	G11=-4G8+G9	-16
0	0	4	12	G12=G9	16
0	1	0	2	G10=G7/4	3
1	0	0	1	G11=G8/-8	1
0	0	1	3	G12=G9/4	4

$$L = \{1;2;3\}$$

2e)

$$L = \{(x_1; x_2) \mid x_2 = 7-3 \cdot x_1 \wedge x_1 \in \mathbb{R}\}$$

3)

$$\begin{array}{r} x_1 x_1 \\ + x_2 x_1 \\ x_4 \\ \hline x_1 x_3 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 & & = x_3 + 10 \cdot x_4 \\ x_1 + x_2 + x_4 & & = x_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 - & x_3 - 10x_4 & = 0 \\ & x_2 + x_4 & = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 + 0x_2 - 1x_3 - 10x_4 & = & 0 \\ 0x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 1x_4 & = & 0 \end{array}$$

x_1	x_2	x_3	x_4	b	Op	KS
2	0	-1	-10	0	G1	
0	1	0	1	0	G2	
-2	0	1	10	0	G3=G1/-1	
0	1	0	1	0	G4=G2	

$$H := \{0;1;2;\dots;9\}$$

$$L = \{(x_1; x_2; x_3; x_4) \mid x_3=2x_1-10x_4 \wedge x_2=-x_4 \wedge x_4 \in \{0;1\} \wedge x_1 \in H \wedge x_2 \in H \wedge x_3 \in H \text{ und } x_1, x_2, x_3 \text{ alle jeweils verschieden}\}$$

$$\text{wähle } x_4 = 0 \text{ und } x_1 = 3: \quad (3;0;6;0) \in L \implies 33+03=36$$

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben. Wenn nötig, Zeichnung machen.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

AUFGABEN

Bemerkungen:

Lösungen wie im Unterricht, ansonsten **massiver** Punkteabzug!!

Gausschen Algorithmus benutzen !

1)

Geben Sie die Lösungsmenge der folgenden LGS an:

a) 3 P

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}$$

b) 3 P

$$\begin{array}{cccc} 1 & 8 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}$$

c) 7 P

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array}$$

d) 7 P

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 5 & 9 \end{array}$$

e) 10P

$$\frac{1}{5}x_1 + x_2 + \frac{1}{10}x_3 = \frac{5}{3}$$

$$-5x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3 = -\frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3 = 7$$

Bemerkung zur Aufgabe:

Wenn die Lösungsmenge aus unendlich vielen Elementen besteht, muß zusätzlich noch ein konkretes Element der Lösungsmenge angegeben werden (gibt jeweils 2 Punkte).

Bei der Auswahl eines konkreten Elements dürfen nicht alle frei wählbaren Parameter Null gesetzt werden.

2)

10 P

Ein Vater und seine beiden Söhne sind zusammen 100 Jahre alt.

Der Vater ist doppelt so alt wie sein ältester Sohn und 30 Jahre älter als sein jüngster Sohn.

Wie alt sind Vater und Söhne ?

3)

10P

Die Quersumme einer dreistelligen Zahl ist 6. Werden die Hunderter und die Einerziffern vertauscht, so erhöht sich der Wert der Zahl um 198. Wie lautet die Zahl, wenn ihre Einerziffer um 1 größer ist als die Zehnerziffer?

Anleitung: Die drei Unbekannten sind Hunderterziffer x , Zehnerziffer y und Einerziffer z .

Lösungen:

1)

a) $L = \{(9;8;7)\}$

b) $L = \{\}$

c)

$$x_1 = 3 - 2 \cdot x_2$$

$$L = \{(x_1; x_2) \mid x_1 = 3 - 2 \cdot x_2 \wedge x_2 \in \mathbb{R}\}$$

wähle: $x_2 = 1$, dann gilt:

$$x_1 = 3 - 2 \cdot 1 = 1$$

also: $(1; 1) \in L$

d)

$$x_1 = 7 - 4 \cdot x_3$$

$$x_2 = 9 - 5 \cdot x_3$$

$$L = \{(x_1; x_2; x_3) \mid x_1 = 7 - 4 \cdot x_3 \wedge x_2 = 9 - 5 \cdot x_3 \wedge x_3 \in \mathbb{R}\}$$

e) fehlt noch

$$x_1 = 2 \quad x_2 = 2/3 \quad x_3 = 6$$

2) fehlt noch

Ein Vater und seine beiden Söhne sind zusammen 100 Jahre alt.

Der Vater ist doppelt so alt wie sein ältester Sohn und 30 Jahre älter als sein jüngster Sohn.

Wie alt sind Vater und Söhne ?

3)

123

*Name, Vorname:*Hilfsmittel:
keine

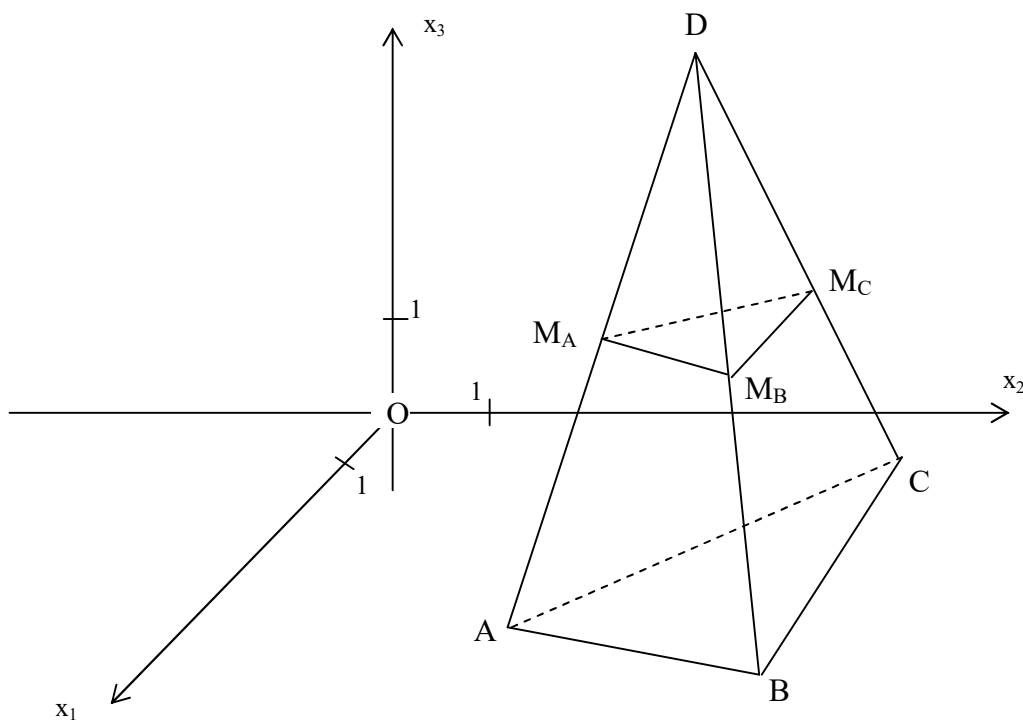
Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben. Wenn nötig, Zeichnung machen.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punktabzug !!!!

AUFGABEN**1) Gegeben ist eine dreiseitige Pyramide in einem räumlichen Koordinatensystem. (18P)**Mit M_A , M_B und M_C sind die Mittelpunkte der von D ausgehenden Kanten bezeichnet.

Berechnen Sie

- a) $\overrightarrow{OM_A}$ in Abhängigkeit von \overrightarrow{OA} und \overrightarrow{OD}
- b) $\overrightarrow{OM_B}$ in Abhängigkeit von \overrightarrow{OB} und \overrightarrow{OD}
- c) $\overrightarrow{OM_C}$ in Abhängigkeit von \overrightarrow{OC} und \overrightarrow{OD}



2) Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Gleichung: (16P)

$$x \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - 2x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = -x \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad x \in \mathbb{R}$$

Bemerkung:

Die Äquivalenzumformungen müssen **elementar** und in **nachvollziehbaren** Schritten (wie im Unterricht !!!) angegeben werden.

3) Stellen Sie den Vektor $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ als Linearkombination folgender Vektoren dar: (16P)

Bemerkung:

Lösungsmenge mit **Gausschem Algorithmus** angeben und dann Darstellung als Linearkombination !

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Bemerkung:

Die Äquivalenzumformungen müssen **elementar** und in **nachvollziehbaren** Schritten (wie im Unterricht !!!) angegeben werden.

Lösungen:

1)

$$\text{a) } \overrightarrow{OM_A} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} (\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} \overrightarrow{OD} - \frac{1}{2} \overrightarrow{OA} =$$

$$\frac{1}{2} \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} \overrightarrow{OD} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD})$$

$$\text{b) } \overrightarrow{OM_B} = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2} (\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{OD} - \frac{1}{2} \overrightarrow{OB} =$$

$$\frac{1}{2} \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{OD} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD})$$

$$\text{c) } \overrightarrow{OM_C} = \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2} \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2} (\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2} \overrightarrow{OD} - \frac{1}{2} \overrightarrow{OC} =$$

$$\frac{1}{2} \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2} \overrightarrow{OD} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$$

2)

$$x \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - 2x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = -x \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ 3 \end{pmatrix} \iff x \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - 2x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + x \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ 3 \end{pmatrix} \iff$$

$$x \cdot \left[\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ 3 \end{pmatrix} \iff x \cdot \begin{pmatrix} -2-2+2 \\ 3+4+1 \\ 4-6+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ 3 \end{pmatrix} \iff$$

$$x \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ 3 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} -2x \\ 8x \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ 3 \end{pmatrix} \iff -2x = -4 \wedge 8x = 16 \wedge x = 3 \iff$$

$$x = 2 \wedge x = 2 \wedge x = 3, \text{ also } L = \{ \}$$

3)

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 \cdot x_1 \\ -1 \cdot x_1 \\ 1 \cdot x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \cdot x_2 \\ 1 \cdot x_2 \\ 1 \cdot x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \cdot x_3 \\ 1 \cdot x_3 \\ -1 \cdot x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \iff$$

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 \\ -1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 \\ 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 - 1 \cdot x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \iff$$

$$1 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = -1 \wedge -1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = 4 \wedge 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 - 1 \cdot x_3 = -2 \iff$$

$$\begin{aligned} 1 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 &= -1 \\ -1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 &= 4 \\ 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 - 1 \cdot x_3 &= -2 \end{aligned} \quad (8P)$$

oder in Matritzenform: (5P)

x_1	x_2	x_3	b	Op	KS
1	-2	1	-1	G1	-1
-1	1	1	4	G2	5
1	1	-1	-2	G3	-1
1	-2	1	-1	G4=G1	-1
0	-1	2	3	G5=G1+G2	4
0	-3	2	1	G6=G1-G3	0
1	0	-3	-7	G7=-2G5+G4	-9
0	-1	2	3	G8=G5	4
0	0	-4	-8	G9=-3G5+G6	-12
-4	0	0	4	G10=-4G7+3G9	0
0	-2	0	-2	G11=G9+2G8	-4
0	0	-4	-8	G12=G9	-12
1	0	0	-1	G13=G10/-4	0
0	1	0	1	G14=G11/-2	2
0	0	1	2	G15=G12/-4	3

$$L = \{ (-1; 1; 2) \} \quad (2P)$$

also:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (1P)$$

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben. Wenn nötig, Zeichnung machen.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punktabzug !!!!

AUFGABEN

1)

10P

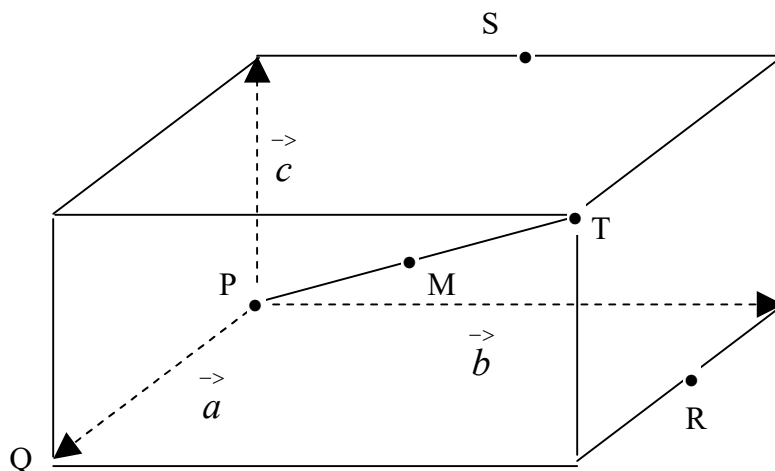
Gegeben sind die Punkte

 $A(0 \mid 0 \mid 0)$, $B(1 \mid 2 \mid 3)$, $C(4 \mid 0 \mid 4)$ und $D(3 \mid -2 \mid 1)$.

- a) Zeichne die Punkte in ein rechtwinkliges Koordinatensystem ein.
 - b) Untersuche rechnerisch, ob das Viereck ABCD ein Parallelogramm ist.
- Tipp: nutze die Eigenschaft der Parallelität von Vektoren.

2)

10P

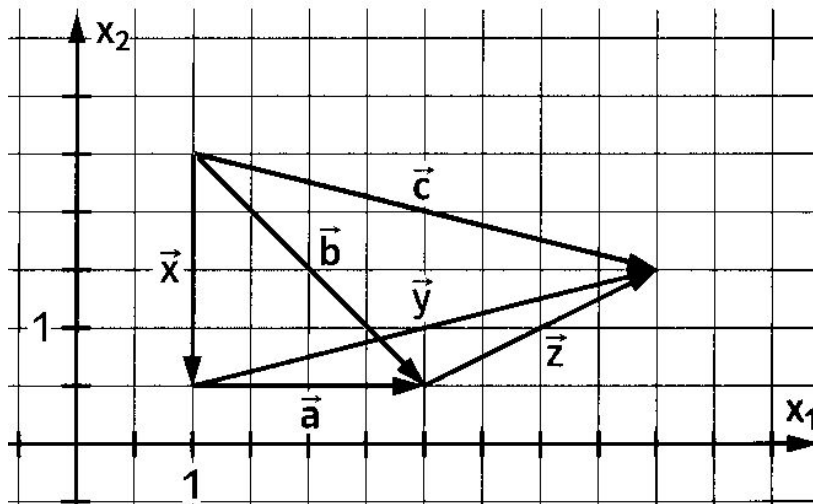


R und S sind Kantenmitten eines Quaders. M ist die Mitte der durch P und T gehenden Diagonalen.

- a) Stelle den Vektor \overrightarrow{RS} als Linearkombination der Vektoren \overrightarrow{a} , \overrightarrow{b} und \overrightarrow{c} dar.
- b) Stelle den Vektor \overrightarrow{SQ} als Linearkombination der Vektoren \overrightarrow{a} , \overrightarrow{b} und \overrightarrow{c} dar.
- c) Stelle den Vektor \overrightarrow{PT} als Linearkombination der Vektoren \overrightarrow{a} , \overrightarrow{b} und \overrightarrow{c} dar.
- d) Stelle den Vektor \overrightarrow{TM} als Linearkombination der Vektoren \overrightarrow{a} , \overrightarrow{b} und \overrightarrow{c} dar.

3)

10P



Stelle die Vektoren \vec{x} , \vec{y} und \vec{z} als Linearkombination der Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} im zweidimensionalen Raum dar und berechne sie.

4)

20P

Gegeben sind die Punkte $A(3 \mid -1 \mid 2)$, $B(4 \mid 4 \mid 2)$, $C(2,5 \mid 2,5 \mid 4)$ und $D(2 \mid 0 \mid 4)$.

a) Zeige rechnerisch (mit Hilfe der Vektorrechnung) : das Viereck ABCD ist ein Trapez und kein Parallelogramm.

Tipp: nutze die Eigenschaft der Parallelität von Vektoren.

b) Bestimme rechnerisch (mit Hilfe der Vektorrechnung) die Koordinaten des Mittelpunkts der Diagonalen \overline{BD} .

Lösungen:

1)

b.) Untersuche rechnerisch, ob ABCD ein Parallelogramm ist.

A(0 | 0 | 0), B(1 | 2 | 3), C(4 | 0 | 4) und D(3 | -2 | 1).

$$\begin{aligned}\vec{AB} &= \begin{pmatrix} 1-0 \\ 2-0 \\ 3-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} & \vec{DC} &= \begin{pmatrix} 4-3 \\ 0-(-2) \\ 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \vec{AD} &= \begin{pmatrix} 3-0 \\ -2-0 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} & \vec{BC} &= \begin{pmatrix} 4-1 \\ 0-2 \\ 4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

also: $\vec{AB} = \vec{DC}$ und $\vec{AD} = \vec{BC} \implies$ Parallelogramm

2)

$$\begin{aligned}\vec{RS} &= -\vec{a}/2 + \vec{c} - \vec{b}/2 & \vec{SQ} &= -\vec{b}/2 - \vec{c} + \vec{a} \\ \vec{PT} &= \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} & \vec{TM} &= -\vec{PT}/2 = -(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})/2\end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned}\vec{x} &= \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 2-2 \\ -2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \\ \vec{y} &= \vec{a} - \vec{b} + \vec{c} = \begin{pmatrix} 2-2+4 \\ 0-(-2)+(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \vec{z} &= -\vec{b} + \vec{c} = \begin{pmatrix} -2+4 \\ 2+(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

4)

a)

$$\begin{aligned}\vec{AB} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{DC} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 2,5 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \vec{AB} = 2 \vec{DC} \implies \vec{AB} \parallel \vec{DC} \\ \vec{AD} &= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{BC} = \begin{pmatrix} -1,5 \\ -1,5 \\ 2 \end{pmatrix} \implies \vec{AD} \text{ und } \vec{BC} \text{ sind nicht parallel}\end{aligned}$$

b)

Für den Mittelpunkt M gilt:

$$\begin{aligned}\vec{OM} &= \vec{OB} + \frac{1}{2} \vec{BD} \\ \vec{BD} &= \begin{pmatrix} 2-4 \\ 0-4 \\ 4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} & \vec{OM} &= \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

also M(3 | 2 | 3)

Name, Vorname:

Hilfsmittel:
keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben. Wenn nötig, Zeichnung machen.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punktabzug !!!!

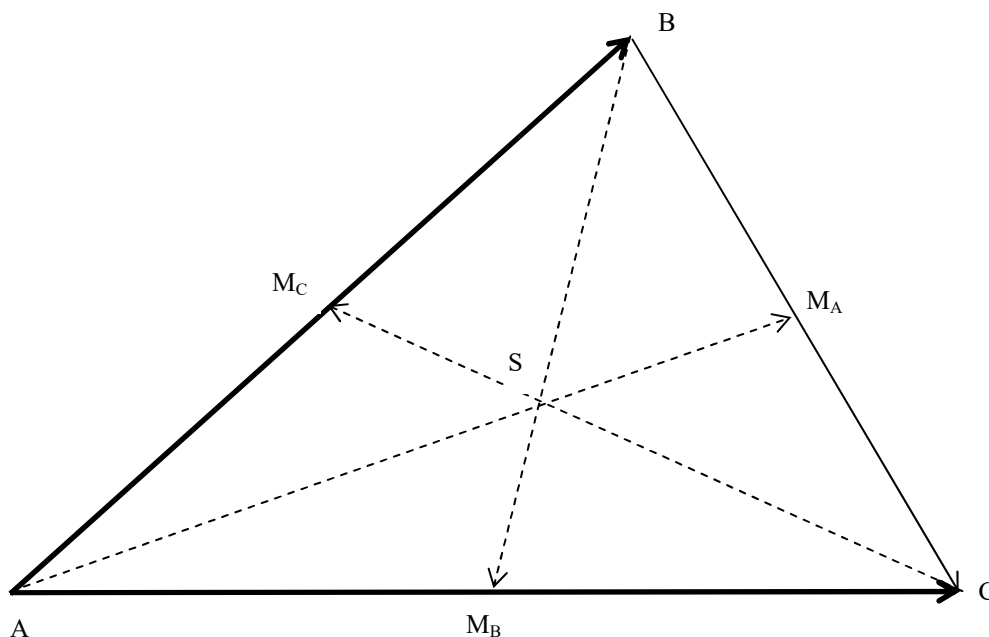
AUFGABEN

1)

50P

Beweisen Sie:

Die Seitenhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich im Schwerpunkt S im Verhältnis 2 : 1



Name, Vorname:

Hilfsmittel:

Taschenrechner

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben. Wenn nötig, Zeichnung machen.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

AUFGABEN

Bemerkungen:

Lösungen erstellen wie im Unterricht, ansonsten **massiver** Punkteabzug!!

1) 10P

Gegeben sind die Punkte $A(-5 \mid 1 \mid 4)$ und $B(-1 \mid 9 \mid 16)$.

Teilen Sie die Strecke \overline{AB} in 4 gleiche Teile und bestimmen Sie die Teilpunkte dieser Strecke.

Berechnen Sie die exakte Länge einer Teilstrecke.

2) 11P

a)

Bestimmen Sie eine Parameterform der Geradengleichung der

a) x_1 -Achse

b) x_2 -Achse

c) x_3 -Achse

d) einer Winkelhalbierenden in der x_1 - x_2 -Ebene

b)

Berechnen Sie, ob sich der Punkt $Q(10 \mid -3 \mid 6)$ auf der Geraden h befindet.

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} ; r \in \mathbb{R}$$

3)

12P

g ist eine Gerade mit der folgenden Geradengleichung in Parameterform:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} ; r \in \mathbb{R}$$

a) Welcher Punkt P auf g wird für $r = -3$ auf der Geraden g festgelegt ?

b) Bestimmen Sie die Punkte A, B auf g die von $M(1 \mid 2 \mid 3)$ den Abstand 6 LE haben.

4)

17P

gegeben sind die 2 Geraden g und h:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a)

Begründen Sie rechnerisch, ob diese Geraden parallel sind.

b)

Berechnen Sie die Schnittpunkt(e) der Geraden g und h.

Lösung:

1)

10P

$$\vec{v} = \frac{\vec{AB}}{4} = \frac{\begin{pmatrix} -1 - (-5) \\ 9 - 1 \\ 16 - 4 \end{pmatrix}}{4} = \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}}{4} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{OT_1} = \vec{OA} + \vec{v} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5+1 \\ 1+2 \\ 4+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \implies T_1(-4 \mid 3 \mid 7)$$

$$\vec{OT_2} = \vec{OA} + 2 \vec{v} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5+2 \\ 1+4 \\ 4+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} \implies T_2(-3 \mid 5 \mid 10)$$

$$\vec{OT_3} = \vec{OA} + 3 \vec{v} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5+3 \\ 1+6 \\ 4+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 13 \end{pmatrix} \implies T_3(-2 \mid 7 \mid 13)$$

$$|\vec{AT_1}| = \left| \begin{pmatrix} -4 - (-5) \\ 3 - 1 \\ 7 - 4 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

2)

11P

a) 4P

$$\text{x}_1\text{-Achse : } \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{R}$$

$$\text{x}_2\text{-Achse : } \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{R}$$

$$\text{x}_3\text{-Achse : } \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{R}$$

$$1. \text{ Winkelhalbierende : } \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{R}$$

b) 7P

Annahme: $Q \in g$

und man kennt den Wert von r - nennen wir ihn r_Q - dann kann man \vec{OQ} wie folgt darstellen:

$$\begin{pmatrix} 10 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = \vec{OQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r_Q \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 10 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r_Q \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 10 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 4 \cdot r_Q \\ 1 - 2 \cdot r_Q \\ 3 + r_Q \end{pmatrix}$$

$$10 = 2 + 4 r_Q \wedge -3 = 1 - 2 r_Q \wedge 6 = 3 + r_Q \iff$$

$$r_Q = 2 \wedge r_Q = 2 \wedge r_Q = 3$$

$$\implies L = \{\}$$

Damit liegt Q nicht auf der Geraden g .

3)

12P

a) 3P

$P(x_{1P} \mid x_{3P} \mid x_{2P})$ sei der zu $r = -3$ zugehörige Punkt auf der Geraden g

$$\begin{pmatrix} x_{1P} \\ x_{2P} \\ x_{3P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + (-3) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \implies P(1 \mid 2 \mid 3)$$

b) 9P

Sei \vec{m}_0 der Einheitsvektor des Richtungsvektors von g . Dieser hat die Länge 1. Es gilt:

$$\vec{m}_0 = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right|} = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Damit gilt:

$$1) \vec{OA} = \vec{OM} + 6 \cdot \vec{m}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 6 \cdot \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ also } A(5 \mid 0 \mid -1)$$

$$2) \vec{OB} = \vec{OM} - 6 \cdot \vec{m}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 6 \cdot \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ also } B(-3 \mid 4 \mid -1)$$

4)

17P

a) 5P

Wenn die Geraden parallel sind, dann ist ein Richtungsvektor der einen Geraden einem Vielfachen (ungleich null) des Richtungsvektors der anderen Geraden, also gibt es ein k mit:

$$k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \iff$$

$$\begin{pmatrix} 2k \\ 3k \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \iff$$

$$2k = 1 \iff k = 1/2$$

$$3k = 1 \iff k = 1/3$$

$$k = 2 \iff k = 2$$

Ergebnis: Der Richtungsvektor von h ist kein Vielfaches des Richtungsvektors von g .

b) 12P

Der Schnittpunkt sei $S(x_{1S} | x_{2S} | x_{3S})$. Dann gibt es ein t_s und r_s mit:

$$\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + t_s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{1S} \\ x_{2S} \\ x_{3S} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} + r_s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + t_s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} + r_s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \cdot t_s \\ 3 \cdot t_s \\ 1 \cdot t_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \cdot r_s \\ 1 \cdot r_s \\ 2 \cdot r_s \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 7+2 \cdot t_s \\ -2+3 \cdot t_s \\ 2+1 \cdot t_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+1 \cdot r_s \\ -6+1 \cdot r_s \\ -1+2 \cdot r_s \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{rclcl} 7 + 2t_s & = & 4 + r_s & & 2t_s - r_s = -3 \\ -2 + 3t_s & = & -6 + r_s & \Leftrightarrow & 3t_s - r_s = -4 \\ 2 + t_s & = & -1 + 2r_s & & t_s - 2r_s = -3 \end{array}$$

t_s	r_s	b	Op	KS
2	-1	-3	G1	-2
3	-1	-4	G2	-2
1	-2	-3	G3	-4
2	-1	-3	G4=G1	-2
0	-1	-1	G5=3G1-2G2	-2
0	3	3	G6=G1-2G3	6
-2	0	2	G7=-G4+G5	0
0	-1	-1	G8=G5	-2
0	0	0	G9=3G5+G6	0
1	0	-1	G10=G7/-2	0
0	1	1	G11=G8/-1	2

also:

$$\begin{array}{l} t_s = -1 \\ r_s = 1 \\ L = \{ (-1; 1) \} \end{array}$$

Damit:

$$\begin{pmatrix} x_{1S} \\ x_{2S} \\ x_{3S} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} + r_s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Damit: $S(5 | -5 | 1)$

Ergebnis: Die Geraden schneiden sich in einem Punkt.

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

Taschenrechner

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben. Wenn nötig, Zeichnung machen.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punktabzug !!!!

AUFGABEN

Bemerkungen:

Lösungen wie im Unterricht (bzw. wie mit einzelnen Schülern abgemacht), ansonsten **massiver** Punktabzug!!

1)

9P

Geben Sie die Lösungsmenge des folgenden LGS an:

2	2	-1	3
3	-4	3	4
5	-2	-1	-2

2) Geben Sie die Lösungsmenge der folgenden LGSe an:

(durch direktes Ablesen aus der "Diagonalform" oder mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus):

a) 2 P

1	0	0	7
0	1	0	5
0	0	1	3

b) 3 P

1	8	1	5
-1	2	3	-3
0	0	0	6

c) 3 P

3	1	5	9
---	---	---	---

d) 3P

1	0	3	6
0	1	4	8

e) 3P

0	-3	0	-6
0	0	4	12
-2	0	0	8

3) Geben Sie die Lösungsmenge der folgenden LGS an:

(durch direktes Ablesen aus der "Diagonalform" oder mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus):

a) 4 P

6	2	4	8
---	---	---	---

b) 6 P

-2	3	1	-3
4	-6	-2	6
-6	9	3	-9

c) 5 P

-2	3	-1	4
2	-3	1	7
11	17	23	19

d) 10P

0	-1	1	1
2	1	0	4
-2	1	2	6

e) 3P

3	1	7
---	---	---

Lösungen:

1)

x_1	x_2	x_3	b	Op	KS
2	2	-1	3	G1	6
3	-4	3	4	G2	6
5	-2	-1	-2	G3	0
2	2	-1	3	G4=G1	6
0	14	-9	1	G5=3G1-2G2	6
0	14	-3	19	G6=5G1-2G3	30
14	0	2	20	G7=7G4-G5	36
0	14	-9	1	G8=G5	6
0	0	-6	-18	G9=G5-G6	-24
42	0	0	42	G10=G9+3G7	84
0	-28	0	-56	G11=3G9-2G8	-84
0	0	-6	-18	G12=G9	-24
1	0	0	1	G13=G10/41	2
0	1	0	2	G14=G11/-28	3
0	0	1	3	G15=G12/-6	4

$$L = \{(1;2;3)\}$$

2a)

$$L = \{(7;5;3)\}$$

2b)

$$L = \{\}$$

2c)

$$L = \{(x_1; x_2; x_3) \mid x_2 = 9 - 3 \cdot x_1 - 5x_3 \wedge x_1 \in \mathbb{R} \wedge x_3 \in \mathbb{R}\}$$

2d)

$$L = \{(x_1; x_2; x_3) \mid x_1 = 6 - 3 \cdot x_3 \wedge x_2 = 8 - 4 \cdot x_3 \wedge x_3 \in \mathbb{R}\}$$

2e)

x_1	x_2	x_3	b	Op	KS
0	-3	0	-6	G1	-1
0	0	4	12	G2	2
-2	0	0	8	G3	-3
0	1	0	2	G4=G1/-3	3
0	0	1	3	G5=G2/4	4
1	0	0	-4	G6=G3/-2	-3

$$L = \{(-4;2;3)\}$$

3a)

x_1	x_2	x_3	b	Op	KS
6	2	4	8	G1	20
3	1	2	4	G2=G1/2	10

$$L = \{(x_1; x_2; x_3) \mid x_2 = 4 - 3 \cdot x_1 - 2x_3 \wedge x_1 \in \mathbb{R} \wedge x_3 \in \mathbb{R}\}$$

3b)

x_1	x_2	x_3	b	Op	KS
-2	3	1	-3	G1	-1
4	-6	-2	6	G2	2
-6	9	3	-9	G3	-3
-2	3	1	-3	G4=G1	-1
0	0	0	0	G5=2G1+G2	0
0	0	0	0	G6=-3G1+G3	0

$$L = \{(x_1; x_2; x_3) \mid x_3 = -3 - 3 \cdot x_2 + 2x_1 \wedge x_1 \in \mathbb{R} \wedge x_2 \in \mathbb{R}\}$$

3c)

x_1	x_2	x_3	b	Op	KS
-2	3	-1	4	G1	4
2	-3	1	7	G2	7
11	17	23	19	G3	70
-2	3	-1	4	G4=G1	4
0	0	0	11	G5=G1+G2	11

$$L = \{\}$$

3d)

x_1	x_2	x_3	b	Op	KS
0	-1	1	1	G1	1
2	1	0	4	G2	7
-2	1	2	6	G3	7
0	-1	1	1	G4=G1	1
2	1	0	4	G5=G2	7
0	2	2	10	G6=G2+G3	14
0	-1	1	1	G7=G4	1
2	0	1	5	G8=2G4+G5	8
0	0	4	12	G9=3G4+G6	16
0	4	0	8	G10=-4G7+G9	12
-8	0	0	-8	G11=-4G8+G9	-16
0	0	4	12	G12=G9	16
0	1	0	2	G10=G7/4	3
1	0	0	1	G11=G8/-8	1
0	0	1	3	G12=G9/4	4

$$L = \{1; 2; 3\}$$

$$3e) \quad L = \{(x_1; x_2) \mid x_2 = 7 - 3 \cdot x_1 \wedge x_1 \in \mathbb{R}\}$$

KLAUSUR 4 Mathematik 2 2BK11 30.6.2014 Zeit: 60 Minuten

Name, Vorname:

Hilfsmittel:
Taschenrechner

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben. Wenn nötig, Zeichnung machen.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punktabzug !!!!

AUFGABEN

- 1) 9P
Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Gleichung:

$$x \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - 2x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = -x \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad x \in \mathbb{R}$$

- 2) 5P
Begründen Sie mathematisch, ob die Vektoren

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ 30 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix} \text{ linear abhängig bzw linear unabhängig voneinander sind.}$$

- 3) 5P
Bestimmen Sie t so, dass der Winkel zwischen den beiden folgenden Vektoren 90° beträgt:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} t \\ 9 \\ 2t-1 \end{pmatrix}$$

- 4) 31P
a)

Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks, das durch die folgenden Punkte gegeben ist.
 $B(3 \mid 6 \mid 9)$, $C(8 \mid 16 \mid 9)$, $D(5 \mid 10 \mid 0)$

b)

Bestimmen Sie einen Punkt A auf der x_1 - x_2 -Ebene, so daß ABCD ein Parallelogramm ist.

c)

Teilen Sie die Strecke \overline{BD} in 2 gleiche Teile und bestimmen Sie den Teilpunkt dieser Strecke.

d)

Die Punkte $O(0 \mid 0 \mid 0)$ und C legen die Gerade g fest.

Die Punkte B und D legen die Gerade h fest.

Berechnen Sie den Schnittpunkt dieser Geraden.

Lösungen:

1)

9P

$$x \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} - 2x \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ 3 \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ 3 \end{pmatrix}$$

1. Lösung:

$$x \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} - 2x \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ 3 \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ 3 \end{pmatrix} \quad | - x \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$-2x \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 4x \\ 6x \\ 8x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow 4x = 0 \wedge 6x = 0 \wedge 8x = 0 \leftrightarrow x = 0 \wedge x = 0 \wedge x = 0$$

$$L = \{0\}$$

2)

5P

$$u \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ 30 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

hat außer u=0 und v=0 z.B. als weitere Lösung:
u=1 und v=-2

3)

5P

$$\vec{b} \cdot \vec{b}' = t - 18 + 6t - 3 = 0$$

$$7t - 21 = 0$$

$$t = 3$$

4)

31P

a)

8P

Winkel $\alpha = \sphericalangle CBD$

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 8-3 \\ 16-6 \\ 9-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} 5-3 \\ 10-6 \\ 0-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$\cos \alpha = \frac{\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -9 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -9 \end{pmatrix} \right|} = \frac{5 \cdot 2 + 10 \cdot 4 + 0 \cdot (-9)}{\sqrt{5^2 + 10^2 + 0^2} \cdot \sqrt{2^2 + 4^2 + (-9)^2}} = \frac{50}{\sqrt{125} \cdot \sqrt{101}}$$

$$\alpha \approx 63,577034907591810589112242221937^\circ$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot |\overrightarrow{BD}| \cdot \sin \alpha \approx 0,5 \cdot \sqrt{125} \cdot \sqrt{101} \cdot \sin \alpha \approx 50,31$$

b)

9P

$$\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 5-8 \\ 10-16 \\ 0-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ -9 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies A(0 \mid 0 \mid 0)$$

c)

4P

$$\overrightarrow{OM} = (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD})/2 = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}}{2} = \frac{\begin{pmatrix} 3+5 \\ 6+10 \\ 9+0 \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 4,5 \end{pmatrix} \implies M(4 \mid 8 \mid 4,5)$$

d)

10P

Gerade g und h mit den Gleichungen

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 9 \end{pmatrix} \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5-3 \\ 10-6 \\ 0-9 \end{pmatrix}$$

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Der Schnittpunkt sei S(x_{1S} | x_{2S} | x_{3S}). Dann gibt es ein r_s und t_s mit:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r_s \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + t_s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -9 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \cdot r_s \\ 16 \cdot r_s \\ 9 \cdot r_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \cdot t_s \\ 4 \cdot t_s \\ -9 \cdot t_s \end{pmatrix} \iff$$

$$\begin{pmatrix} 8 \cdot r_s \\ 16 \cdot r_s \\ 9 \cdot r_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 + 2 \cdot t_s \\ 10 + 4 \cdot t_s \\ 0 - 9 \cdot t_s \end{pmatrix} \iff \begin{array}{l} 8r_s - 2t_s = 5 \\ 16r_s - 4t_s = 10 \\ 9r_s + 9t_s = 0 \end{array}$$

r_s	t_s		Op	KS
8	-2	5	G1	11
16	-4	10	G2	22
9	9	0	G3	18
8	-2	5	G4=G1	11
0	0	0	G5=-2G1+G2	0
0	-90	45	G6=9G1-8G3	45
8	-2	5	G7=G4	11
0	-90	45	G8=G6	45
-360	0	-180	G9=G8-G7*45	180
0	-90	45	G10=G8	-45
1	0	0,5	G11=G9/-360	
0	1	-0,5	G12=G10/-90	

also $t_s = -0,5$ und $r_s = 0,5 \implies S(4 \mid 8 \mid 4,5)$