

Name, Vorname:

Hilfsmittel:  
keine

Hinweise (unbedingt beachten):

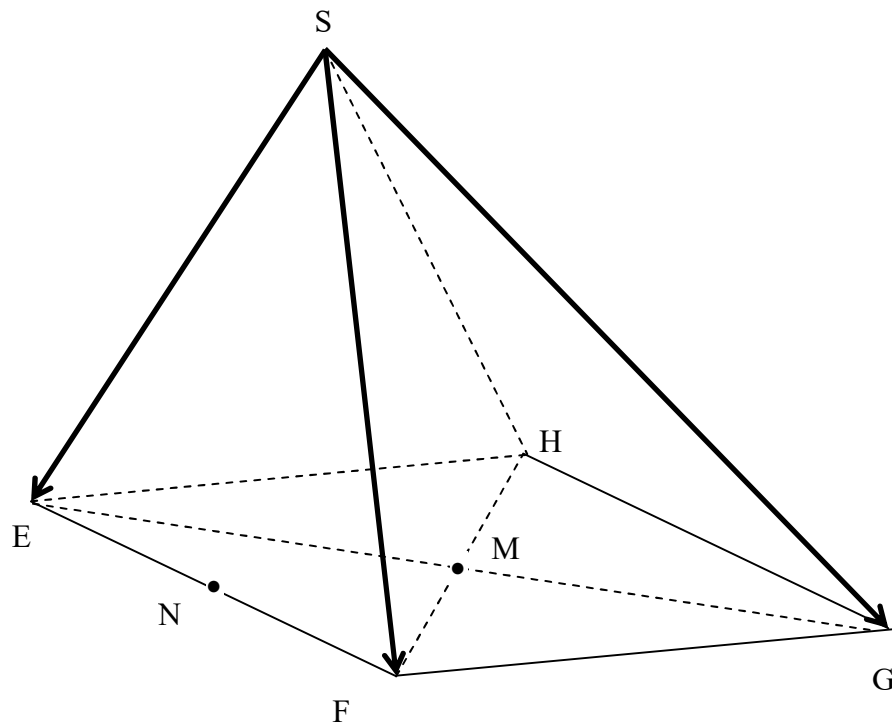
- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben. Wenn nötig, Zeichnung machen.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B:  $3t$  statt  $2t+t$  und  $M$  statt  $M \setminus \{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B:  $1/3$  nicht  $0,333$ ) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel:  $1/4$   $2/4$   $3/4$   $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punktabzug !!!!

## AUFGABEN

1) Stellen Sie die Vektoren  $\overrightarrow{SN}$ ,  $\overrightarrow{SH}$ ,  $\overrightarrow{SM}$  der Pyramide (mit einer rechteckigen Grundfläche) als Linearkombination der Vektoren  $\overrightarrow{SE}$ ,  $\overrightarrow{SF}$ ,  $\overrightarrow{SG}$  dar.

Bemerkung:

N ist die Mitte der Strecke  $\overline{EF}$  und M ist die Mitte der Grundfläche (Rechteck) (15 P)



2) Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Gleichung: (14P)

$$x \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} - 2x \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ 3 \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad x \in \mathbb{R}$$

Bemerkung:

Die Äquivalenzumformungen müssen **elementar** und in **nachvollziehbaren** Schritten (wie im Unterricht !!!) angegeben werden.

3) a)

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Gleichung: (21P)

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) Kann man den Vektor

$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$  als Linearkombination der Vektoren  $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$  darstellen (wenn ja: bitte diese

Linearkombination angeben)?

Begründen Sie (mathematisch mit Hilfe von Aufgabenteil a) oder durch Probieren!

Bemerkungen:

Bei linearen Gleichungssystemen **muss** der Gaußsche Algorithmus benutzt werden !

Die Äquivalenzumformungen müssen **elementar** und in **nachvollziehbaren** Schritten (wie im Unterricht !!!) angegeben werden.

## Lösungen

1)

$$a) \overrightarrow{SN} = \frac{1}{2} \overrightarrow{SE} + \frac{1}{2} \overrightarrow{SF}$$

$$b) \overrightarrow{SH} = \overrightarrow{SE} + \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{SE} + (-\overrightarrow{SF} + \overrightarrow{SG}) = \overrightarrow{SE} - \overrightarrow{SF} + \overrightarrow{SG}$$

$$c) \overrightarrow{SM} = \overrightarrow{SE} + \frac{1}{2} \overrightarrow{EG} = \overrightarrow{SE} + \frac{1}{2} (-\overrightarrow{SE} + \overrightarrow{SG}) = \overrightarrow{SE} - \frac{1}{2} \overrightarrow{SE} + \frac{1}{2} \overrightarrow{SG} = \frac{1}{2} \overrightarrow{SE} + \frac{1}{2} \overrightarrow{SG}$$

2)

1. Lösung

$$x \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} - 2x \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ 3 \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ 3 \end{pmatrix}$$

1. Lösung:

$$x \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} - 2x \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ 3 \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ 3 \end{pmatrix} \quad | -x \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$-2x \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4x \\ 6x \\ 8x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow 4x = 0 \wedge 6x = 0 \wedge 8x = 0 \leftrightarrow x = 0 \wedge x = 0 \wedge x = 0$$

$$L = \{0\}$$

2. Lösung:

$$x \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} - 2x \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ 3 \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2x \\ -3x \\ -4x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4x \\ 6x \\ 8x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x \\ -3x \\ -4x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2x + 4x - 4 \\ -3x + 6x + 16 \\ -4x + 8x + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x - 4 \\ -3x + 16 \\ -4x + 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2x - 4 \\ 3x + 16 \\ 4x + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x - 4 \\ -3x + 16 \\ -4x + 3 \end{pmatrix} \leftrightarrow 2x - 4 = -2x - 4 \wedge 3x + 16 = -3x + 16 \wedge 4x + 3 = -4x + 3$$

$$\leftrightarrow 4x = 0 \wedge 6x = 0 \wedge 8x = 0 \leftrightarrow x = 0$$

$$L = \{0\}$$

3) a)

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1 \\ 2x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3x_2 \\ x_2 \\ 2x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4x_3 \\ 0 \\ 4x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\ -x_1 + x_2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \wedge$$

$$-x_1 + x_2 = 0 \wedge$$

$$2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0$$

$$1 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 = 0$$

$$-1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 0$$

$$2 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 = 0$$

(6P)

oder in Matritzenform:

(9P)

$x_1$	$x_2$		b	Op	KS
1	3	4	0	G1	8
-1	1	0	0	G2	0
2	2	4	0	G3	8
1	3	4	0	G4=G1	8
0	4	4	0	G5=G1+G2	8
0	-4	-4	0	G6=-2G1+G3	-8
-4	0	-4	0	G7=-4G4+3G5	-8
0	4	4	0	G8=G5	8
0	0	0	0	G9=G5+G6	0
-4	0	-4	0	Nullzeile	
0	4	4	0	weglassen	
1	0	1	0		
0	1	1	0		

1 P

2 P

2 P

2 P

2 P

$$L = \{ (x_1; x_2; x_3) \mid x_1 = -x_3 \wedge x_2 = -x_3 \wedge x_3 \in \mathbb{R} \}$$

(2P)

b)

(4P)

Da  $(-1;-1;1) \in L$  folgt:

$$(-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ also:}$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

keine

Hinweise (unbedingt beachten):

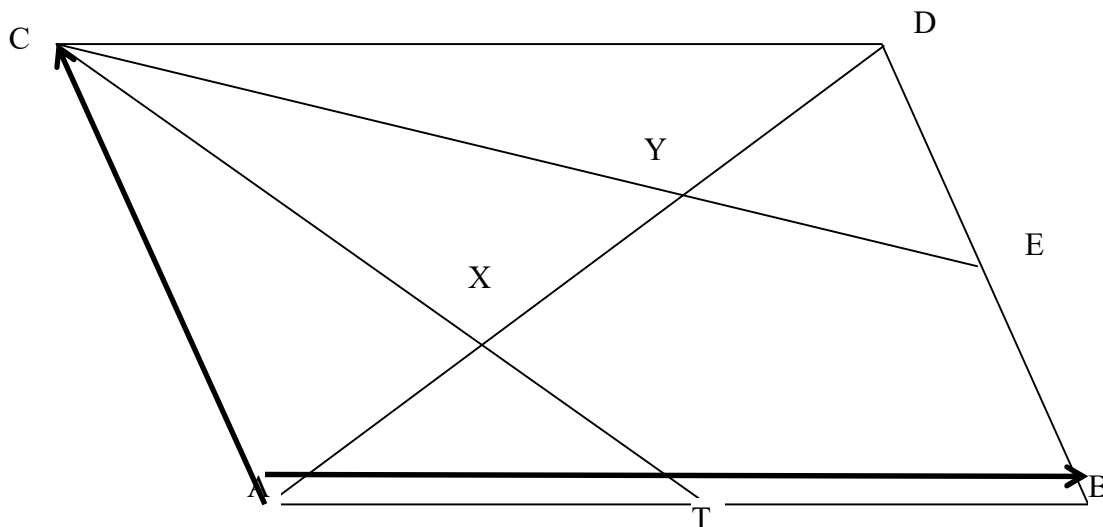
- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben. Wenn nötig, Zeichnung machen.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B:  $3t$  statt  $2t+t$  und  $M$  statt  $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B:  $1/3$  nicht  $0,333$ ) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel:  $1/4$   $2/4$   $3/4$   $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEDLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

## AUFGABEN

1)

Im folgenden Parallelogramm ist T der Mittelpunkt der Strecke  $\overline{AB}$  und

E der Mittelpunkt der Strecke  $\overline{BD}$ .



a) Beweisen Sie:

Die Länge der Strecke  $\overline{AY}$  ist zwei Drittel der Länge der Strecke  $\overline{AD}$   
Betrachten Sie dazu eine geschlossene Vektorkette im Dreieck AYE

b) Beweisen Sie:

Die Länge der Strecke  $\overline{AX}$  ist ein Drittel der Länge der Strecke  $\overline{AD}$   
Betrachten Sie dazu eine geschlossene Vektorkette im Dreieck AXE

Lösungen:

1)

$$\text{a) } \vec{AY} + \vec{YE} + \vec{EA} = \vec{0}$$

Esgilt:

$$\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{AC}$$

$$\vec{CE} = \vec{AB} - \frac{1}{2} \vec{AC}$$

$$\vec{EA} = -\frac{1}{2} \vec{AC} - \vec{AB}$$

Setze:

$$\vec{AY} = r \cdot \vec{AD}$$

$$\vec{YE} = t \cdot \vec{CE}$$

Eingesetzt ergibt dies:

$$r \cdot \vec{AD} + t \cdot \vec{CE} + \vec{EA} = \vec{0}$$

$$r \cdot (\vec{AB} + \vec{AC}) + t \cdot (\vec{AB} - \frac{1}{2} \vec{AC}) + \vec{EA} = \vec{0}$$

$$r \vec{AB} + r \vec{AC} + t \vec{AB} - \frac{1}{2} t \vec{AC} - \frac{1}{2} \vec{AC} - \vec{AB} = \vec{0}$$

$$\vec{AB} (r + t - 1) + \vec{AC} (r - \frac{1}{2} t - \frac{1}{2}) = \vec{0}$$

Da  $\vec{AB}$  und  $\vec{AC}$  linear unabhängig, folgt:

$$r + t - 1 = 0 \text{ und}$$

$$r - \frac{1}{2} t - \frac{1}{2} = 0$$

also:

$$r = \frac{2}{3} \implies \vec{AY} = r \cdot \vec{AD} = \frac{2}{3} \cdot \vec{AD}$$

$$t = \frac{1}{3}$$

$$\text{b) } \vec{AX} + \vec{XT} + \vec{TA} = \vec{0}$$

Esgilt:

$$\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{AC}$$

$$\vec{CT} = -\vec{AC} - \frac{1}{2} \vec{AB}$$

$$\vec{TA} = -\frac{1}{2} \vec{AB}$$

Setze:

$$\vec{AX} = t \cdot \vec{AD}$$

$$\vec{XT} = r \cdot \vec{CT}$$

Eingesetzt ergibt dies:

$$t \cdot \vec{AD} + r \cdot \vec{CT} - \frac{1}{2} \vec{AB} = \vec{0}$$

$$t \cdot (\vec{AB} + \vec{AC}) + r \cdot (-\vec{AC} + \frac{1}{2} \vec{AB}) - \frac{1}{2} \vec{AB} = \vec{0}$$

$$t \vec{AB} + t \vec{AC} - r \vec{AC} + \frac{1}{2} r \vec{AB} - \frac{1}{2} \vec{AB} = \vec{0}$$

$$\vec{AB} (t + \frac{1}{2} r - \frac{1}{2}) + \vec{AC} (t - r) = \vec{0}$$

Da  $\vec{AB}$  und  $\vec{AC}$  linear unabhängig, folgt:

$$t + \frac{1}{2} r - \frac{1}{2} = 0 \text{ und}$$

$$t - r = 0$$

also:

$$r = \frac{1}{3} \implies \vec{AX} = t \cdot \vec{AD} = \frac{1}{3} \cdot \vec{AD}$$

$$t = \frac{1}{3}$$

Name, Vorname:

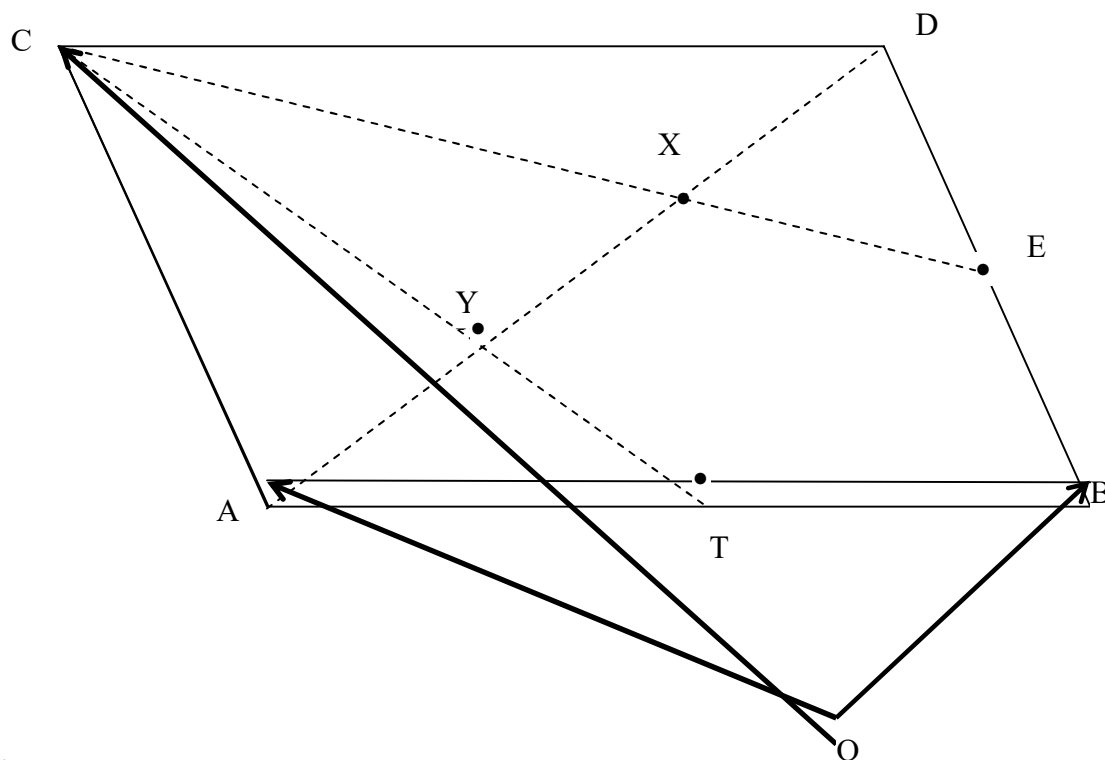
Hilfsmittel:  
Taschenechner

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben. Wenn nötig, Zeichnung machen.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B:  $3t$  statt  $2t+t$  und  $M$  statt  $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B:  $1/3$  nicht  $0,333$ ) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel:  $1/4$   $2/4$   $3/4$   $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punktabzug !!!!

## AUFGABEN

- 1) 20P  
 Im folgenden Parallelogramm ABCD (im dreidimensionalen Raum) ist T der Mittelpunkt der Strecke  $\overline{AB}$  und E der Mittelpunkt der Strecke  $\overline{BD}$ . Die Punkte X und Y teilen die Strecke  $\overline{AD}$  in 3 gleiche Teile.



- a) 6P  
 Die Vektoren  $\overrightarrow{OA}$ ,  $\overrightarrow{OB}$  und  $\overrightarrow{OC}$  sind linear unabhängig. Was bedeutet das anschaulich ?  
 Was bedeutet das formal mathematisch?



b) 14P

Stellen Sie die Vektoren  $\vec{AB}$ ,  $\vec{AC}$ ,  $\vec{AD}$  und  $\vec{AX}$  in Abhängigkeit von genau (nur) den Vektoren  $\vec{OA}$ ,  $\vec{OB}$ ,  $\vec{OC}$  dar.

2) 10P

Geben Sie im dreidimensionalen Raum 3 Vektoren (alle ungleich dem Nullvektor) an, die nicht linear unabhängig voneinander (also linear abhängig) sind.

3) 10P

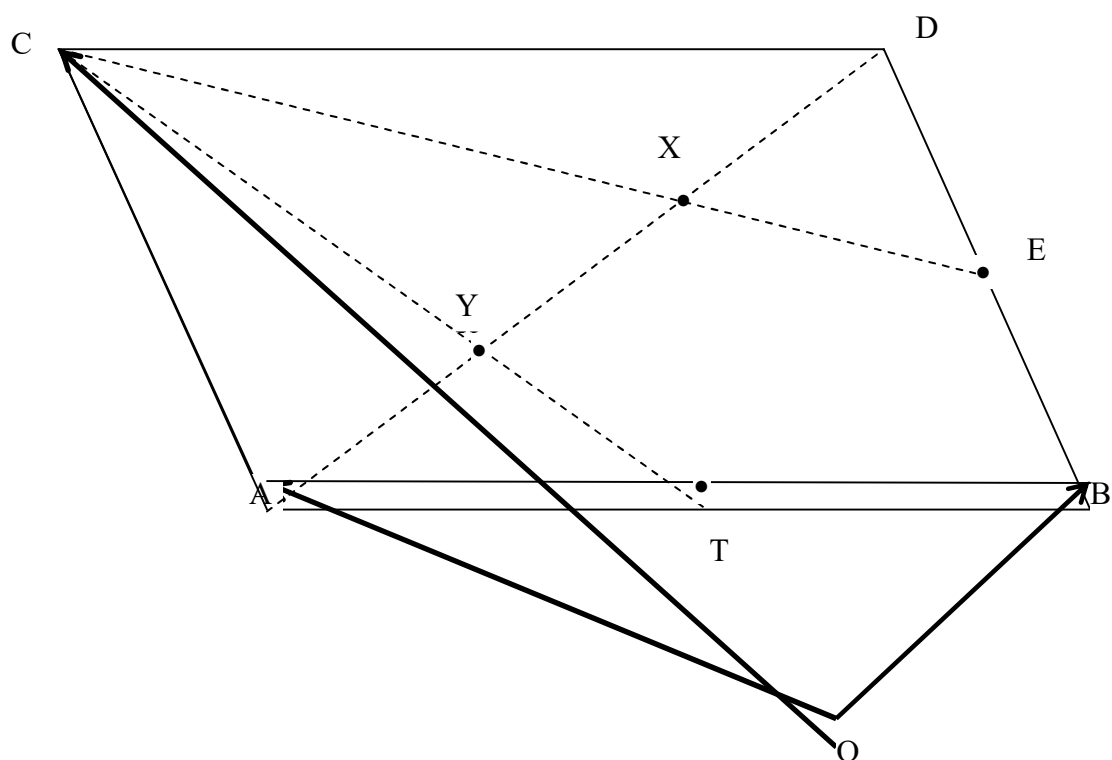
Gegeben sind die Punkte A(4 | -3 | 5), B(-2 | 9 | -21)

Berechnen Sie den Mittelpunkt M der Strecke  $\overline{AB}$

4) 10P

a) Berechnen Sie den Einheitsvektor des Vektors  $\begin{pmatrix} -15 \\ -10 \\ 6 \end{pmatrix}$

b) Zeigen Sie, dass dieser Einheitsvektor die Länge 1 hat.



a)

Stellen Sie die folgenden Vektoren in Abhängigkeit von  $\vec{OA}$ ,  $\vec{OB}$ ,  $\vec{OC}$  dar:

$\vec{AB}$ ,  $\vec{AC}$ ,  $\vec{AD}$ ,  $\vec{AX}$

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$$

$$\vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA}$$

$$\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{AC} = \vec{OB} - \vec{OA} + \vec{OC} - \vec{OA} = \vec{OB} + \vec{OC} - 2\vec{OA}$$

$$\vec{AX} = \frac{2}{3} \vec{AD} = \frac{2}{3} (\vec{OB} + \vec{OC} - 2\vec{OA}) = \frac{2}{3} \vec{OB} + \frac{2}{3} \vec{OC} - \frac{4}{3} \vec{OA}$$

2)

10P

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  sind nicht linear unabhängig, weil:

$$1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3)

10P

$$\vec{OM} = \frac{1}{2} (\vec{OA} + \vec{OB}) = \frac{1}{2} \left( \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 9 \\ -21 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix} \text{ also: } M(1 \mid 3 \mid -8)$$

4)

10P

$$\text{a) } \vec{d}_0 = \frac{\begin{pmatrix} -15 \\ -10 \\ 6 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} -15 \\ -10 \\ 6 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{\begin{pmatrix} -15 \\ -10 \\ 6 \end{pmatrix}}{\sqrt{(-15)^2 + (-10)^2 + 6^2}} = \frac{\begin{pmatrix} -15 \\ -10 \\ 6 \end{pmatrix}}{\sqrt{361}} = \begin{pmatrix} -15/19 \\ -10/19 \\ 6/19 \end{pmatrix}$$

b)

$$\left\| \begin{pmatrix} -15/19 \\ -10/19 \\ 6/19 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\left(\frac{-15}{19}\right)^2 + \left(\frac{-10}{19}\right)^2 + \left(\frac{6}{19}\right)^2} = \sqrt{\frac{225}{361} + \frac{100}{361} + \frac{36}{361}} = \sqrt{\frac{361}{361}} = 1$$

## KLAUSUR 2    Mathematik 2    2BK11    Nachtermin 1    Zeit: 45 Minuten

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben. Wenn nötig, Zeichnung machen.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B:  $3t$  statt  $2t+t$  und  $M$  statt  $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B:  $1/3$  nicht  $0,333$ ) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel:  $1/4$   $2/4$   $3/4$   $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

### AUFGABEN

1) Die Punkte A, B, C, D im dreidimensionalen Raum bilden ein Viereck, wobei diese Punkte nicht in einer Ebene liegen müssen.

Beweisen Sie:

Die Seitenmitten dieses Vierecks sind die Ecken eines Parallelogramms.

Name, Vorname:

Hilfsmittel:  
Taschenechner

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben. Wenn nötig, Zeichnung machen.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B:  $3t$  statt  $2t+t$  und  $M$  statt  $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B:  $1/3$  nicht  $0,333$ ) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel:  $1/4$   $2/4$   $3/4$   $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

## AUFGABEN

1) Gegeben ist die Gerade durch die folgenden 2 Punkte:

A (1 | 2 | 3)

B (11 | -18 | -17)

a) 3P  
Bestimmen Sie rechnerisch die Gleichung (in Parameterform) der Geraden  $g = (AB)$

b) 4P  
Zeigen Sie rechnerisch, dass der Punkt Q (19 | -34 | -33) auf der Geraden  $g$  liegt. 4P

c) 16P  
Bestimmen Sie rechnerisch die Punkte  $P_1$  und  $P_2$ , die von A die Entfernung 120 LE (Längeneinheiten) haben und auf der Geraden  $g$  liegen.

d) 8P  
Durch die Punkte A und Q ist die Strecke  $\overline{AQ}$  gegeben.  
Bestimmen Sie rechnerisch die Punkte  $T_1$  und  $T_2$ , so dass die Strecke  $\overline{AQ}$  in 3 gleiche Teile geteilt wird.

e) 15P  
Bestimmen Sie rechnerisch die Gerade  $h$ , die senkrecht auf  $g$  steht und durch den Punkt R(5 | 1 | 6) geht.

f) 1P  
Bestimmen Sie rechnerisch den Abstand des Punktes R(5 | 1 | 6) von der Geraden  $g$ .

g) 3P  
Bestimmen Sie rechnerisch einen Punkt C, so dass die Gerade  $i = (BC)$  durch den Ursprung  $O(0|0|0)$  geht und  $B \neq C$  und  $C \neq O(0|0|0)$  ist.

Lösungen:

a)

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 11-1 \\ -18-2 \\ -17-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} \quad 3P$$

b)

Sei  $Q \in g$ , dann existiert ein  $t_s$  mit:

$$\begin{pmatrix} 19 \\ -34 \\ -33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t_s \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 19 \\ -34 \\ -33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+10t_s \\ 2-20t_s \\ 3-20t_s \end{pmatrix} \Leftrightarrow (t_s=1,8) \wedge (t_s=1,8) \wedge (t_s=1,8) \Leftrightarrow t_s=1,8$$

$$\Rightarrow Q \in g \quad 4P$$

c) Gesucht:  $t_x$  mit

$$|t_x \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix}| = 120 \quad 3P$$

$$|t_x \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix}| = \left| \begin{pmatrix} 10t_x \\ -20t_x \\ -20t_x \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(10t_x)^2 + (-20t_x)^2 + (-20t_x)^2} = \sqrt{900t_x^2} = 30\sqrt{t_x^2} \quad 4P$$

$$30\sqrt{t_x^2} = 120 \Leftrightarrow \sqrt{t_x^2} = 4 \Leftrightarrow |t_x| = 4 \Leftrightarrow t_{x1} = 4, t_{x2} = -4 \quad 5P$$

also:

4P

$$\vec{OP}_1 = \vec{OA} + t_x \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41 \\ -78 \\ -77 \end{pmatrix}$$

$$\vec{OP}_2 = \vec{OA} + t_x \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -39 \\ 82 \\ 83 \end{pmatrix}, \quad \text{also } P_1(41 | -78 | -77), P_2(-39 | 82 | 83)$$

d)

8P

$$\vec{AQ} = \begin{pmatrix} 19-1 \\ -34-2 \\ -33-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ -36 \\ -36 \end{pmatrix} \quad \vec{AT}_2 = \vec{OA} + \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} 18 \\ -36 \\ -36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} 18 \\ -36 \\ -36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -22 \\ -21 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AT}_1 = \vec{OA} + \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 18 \\ -36 \\ -36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 18 \\ -36 \\ -36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -10 \\ -9 \end{pmatrix}$$

also:  
 $T_1(7 | -10 | -9) \quad T_2(13 | -22 | -21)$

e)

$F(x_{1F} | x_{2F} | x_{3F})$  sei der Punkt, der auf  $g$  und  $h$  liegt:

$$\begin{pmatrix} x_{1F} \\ x_{2F} \\ x_{3F} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t_F \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_{1F} \\ x_{2F} \\ x_{3F} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+10t_F \\ 2-20t_F \\ 3-20t_F \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x_{1F} & = & 1+10t_F \\ x_{2F} & = & 2-20t_F \\ x_{3F} & = & 3-20t_F \end{matrix} \quad 2P$$

Es gilt außerdem:

$$\begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} \perp \vec{FR} \Leftrightarrow \quad 1P$$

$$\begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 5-x_{1F} \\ 1-x_{2F} \\ 6-x_{3F} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 5-(1+10t_F) \\ 1-(2-20t_F) \\ 6-(3-20t_F) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 4-10t_F \\ -1+20t_F \\ 3+20t_F \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4-10t_F \\ -1+20t_F \\ 3+20t_F \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \quad 4P$$

$$10 \cdot (4-10t_F) + (-20) \cdot (-1+20t_F) + (-20) \cdot (3+20t_F) = 0 \Leftrightarrow 40 - 100t_F + 20 - 400t_F - 60 - 400t_F = 0 \Leftrightarrow$$

$$-900t_F = 0 \Leftrightarrow t_F = 0 \quad 3P$$

also:

$$\begin{pmatrix} x_{1F} \\ x_{2F} \\ x_{3F} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t_F \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \text{also: } F(1|2|3) \quad 2P$$

Dann gilt:

$$\vec{FR} = \begin{pmatrix} 5-1 \\ 1-2 \\ 6-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und damit:} \quad 2P$$

$$\text{h: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad 1P$$

f)

$$|\vec{FR}| = \left| \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{26} \quad 1P$$

g)

1. Lösung:

O ist ein Aufpunkt und  $\vec{OB}$  ein Richtungsvektor dieser Geraden i. Also gilt:

$$\text{i: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 11-0 \\ -18-0 \\ -17-0 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ -18 \\ -17 \end{pmatrix} \quad 3P$$

wähle z.B:  $t = 2$ , dann gilt:

$$\begin{pmatrix} x_{1C} \\ x_{2C} \\ x_{3C} \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ -18 \\ -17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ -36 \\ -34 \end{pmatrix} \quad \text{und damit ist } C(22 | -36 | -34) \in i$$

## 2. Lösung (nicht so elegant):

Sei  $C(x_{1C} | x_{2C} | x_{3C}) \in i$ , dann ist  $B$  ein Aufpunkt und  $\overrightarrow{BC}$  ein Richtungsvektor dieser Geraden  $i$ . Also gilt:

$$i: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 11 \\ -18 \\ -17 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} x_{1C} - 11 \\ x_{2C} - (-18) \\ x_{3C} - (-17) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -18 \\ -17 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} x_{1C} - 11 \\ x_{2C} + 18 \\ x_{3C} + 17 \end{pmatrix}$$

Da  $0 \in i$ , existiert ein  $t_s$  mit:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -18 \\ -17 \end{pmatrix} + t_s \cdot \begin{pmatrix} x_{1C} - 11 \\ x_{2C} + 18 \\ x_{3C} + 17 \end{pmatrix} \iff \begin{aligned} 0 &= 11 + t_s \cdot x_{1C} - 11 t_s \\ 0 &= -18 + t_s \cdot x_{2C} + 18 t_s \\ 0 &= -17 + t_s \cdot x_{3C} + 17 t_s \end{aligned} \iff$$

$$x_{1C} = (-11 + 11 t_s) / t_s$$

$$x_{2C} = (+18 - 18 t_s) / t_s$$

$$x_{3C} = (17 - 17 t_s) / t_s$$

wähle z.B:  $t_s = -1$ , dann gilt:

$$x_{1C} = (-11 + 11 \cdot (-1)) / (-1) = 22$$

$$x_{2C} = (+18 - 18 \cdot (-1)) / (-1) = -36 \quad \text{und damit ist } C(22 | -36 | -34) \in i$$

$$x_{3C} = (17 - 17 \cdot (-1)) / (-1) = -34$$

## 2. Lösung von f)

Für alle Punkte  $P(x_1 | x_2 | x_3)$ , die sich frei auf der Gerade  $g$  bewegen und diese durchlaufen, gilt:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+10t \\ 2-20t \\ 3-20t \end{pmatrix} \iff \begin{aligned} x_1 &= 1+10t \\ x_2 &= 2-20t \\ x_3 &= 3-20t \end{aligned}$$

also:

$$\overrightarrow{RP} = \begin{pmatrix} x_1 - 5 \\ x_2 - 1 \\ x_3 - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+10t) - 5 \\ (2-20t) - 1 \\ (3-20t) - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10t - 4 \\ -20t + 1 \\ -20t - 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{RP}| &= \sqrt{(10t - 4)^2 + (-20t + 1)^2 + (-20t - 3)^2} = \\ &= \sqrt{100t^2 - 80t + 16 + 400t^2 - 40t + 1 + 400t^2 + 120t + 9} = \\ &= \sqrt{26 + 900t^2} \end{aligned}$$

Wann wird dieser Wert minimal ?

Für  $t = 0$  !

also:

$$|\overrightarrow{RF}| = \sqrt{26}$$