

Name, Vorname:

Hilfsmittel:
keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

AUFGABEN

Geben Sie die Definitionen folgender Begriffe an und machen Sie dazu jeweils ein Beispiel:

- | | |
|---|----|
| 1) Aussage | 5P |
| 2) Aussageform | 5P |
| 3) allgemeingültig | 5P |
| 4) Teilmenge | 5P |
| 5) Vereinigung zweier Mengen | 5P |
| 6) Durchschnitt zweier Mengen | 5P |
| 7) Differenzmenge | 5P |
| 8) Was ist die "beschreibende Form" der Darstellung einer Menge?
Erklären Sie die einzelnen Teile der beschreibenden Form. | 5P |

Name, Vorname:

Hilfsmittel:
keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

AUFGABEN

Geben Sie die Definitionen folgender Begriffe an und machen Sie dazu jeweils ein Beispiel:

- | | |
|---|-----|
| 1) Teilmenge | 5P |
| 2) Vereinigung zweier Mengen | 5P |
| 3) Durchschnitt zweier Mengen | 5P |
| 4) Term | 5P |
| 5) Gleichung | 5P |
| 6) Definitionsmenge | 5P |
| 7) Lösungsmenge | 5P |
| 8) Bestimmen Sie die "größt mögliche" Definitionsmenge und die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen (Grundmenge = \mathbb{R}): | 15P |
- a) $\frac{1}{x} = 0$
- b) $3x = 3x$
- c) $x^2 = -16$
- d) $x = 2x$
- e) $\frac{1}{0} = \frac{x}{x-5}$

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punktabzug !!!!

AUFGABEN

I) Bestimmen Sie die Mengen (keine Venn – Diagramme) 3P1) gegeben: $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leq x \leq 8\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 5\}$ gesucht: $A \cup B$ 2) gegeben: $E = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$, $F = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 2\}$ 3Pgesucht: $E \cap F$ **II) Formen Sie die Terme so um, daß sich allgemeingültige Gleichungen ergeben.
(jeweils 4P)**

3)
$$\frac{20a^2 + 15ab - 35ac}{5a}$$

4)
$$\frac{38u^2 - 57uv}{2u - 3v}$$

5)
$$\frac{ax - ay}{5x - 5y}$$

6)
$$\frac{\frac{a}{b} + 1}{\frac{b}{a} + 1}$$

7)
$$\frac{2x+1}{x} - \frac{x+1}{x}$$

**III) Die Grundmenge ist $G = \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Definitionsmenge D und die Lösungsmenge L der Gleichungen.
Machen Sie dazu die Probe.**

8)
$$\frac{2}{x+1} = \frac{3}{x-1} \quad 4P$$

9)
$$\frac{-3}{2-x} = \frac{3}{x-2} \quad 4P$$

10)
$$\frac{3}{x+4} - \frac{2}{x-4} = \frac{5x-20}{x^2-16} \quad 6P$$

11)
$$\frac{4}{x+2} - \frac{1}{x-1} = \frac{3}{x+1} \quad 6P$$

12)
$$\frac{7(x-5)^2}{6x^2-6} = \frac{5x-1}{3x+3} - \frac{3x-2}{6x-6} \quad 6P$$

Lösungen:

1) $A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 8\}$

2) $E \cap F = \{\}$

3) $\frac{20a^2 + 15ab - 35ac}{5a} = \frac{20a^2}{5a} + \frac{15ab}{5a} - \frac{35ac}{5a} = 4a + 3b - 7c$

4) $\frac{38u^2 - 57uv}{2u - 3v} = \frac{19u(2u - 3v)}{2u - 3v} = 19u$

5) $\frac{ax - ay}{5x - 5y} = \frac{a(x - y)}{5(x - y)} = \frac{a}{5}$

6) $\frac{\frac{a}{b} + 1}{\frac{b}{a} + 1} = \frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{b}}{\frac{b}{a} + \frac{a}{a}} = \frac{\frac{a+b}{b}}{\frac{b+a}{a}} = \frac{(a+b)a}{b(a+b)} = \frac{a}{b}$

7) $\frac{2x+1}{x} - \frac{x+1}{x} = \frac{2x+1-(x+1)}{x} = \frac{2x+1-x-1}{x} = 1$

8)
 $\frac{2}{x+1} = \frac{3}{x-1} \mid \cdot (x+1)(x-1)$
 $D = \mathbb{R} \setminus \{1; -1\}$
 $L = \{-5\}$

9)
 $\frac{-3}{2-x} = \frac{3}{x-2} \mid \cdot (2-x)(x-2)$
 $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$
 $L = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

11)
 $\frac{2-x}{3-x} - 1 = \frac{4-x}{x-3}$
 $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$
 $x = 3$
 $L = \{\}$

12)
 $\frac{3}{x+4} - \frac{2}{x-4} = \frac{5x-20}{x^2-16} \mid \cdot (x^2-16)$
 $D = \mathbb{R} \setminus \{4; -4\}$
 $3(x-4) - 2(x+4) = 5x - 20$
 $3x - 12 - 2x - 8 = 5x - 20$
 $x - 20 = 5x - 20 \mid \cdot + 20 \mid \cdot - 5x$
 $-4x = 0$
 $L = \{0\}$

13)
 $\frac{4}{x+2} - \frac{1}{x-1} = \frac{3}{x+1} \mid \cdot (x-1)(x+1)(x+2)$
 $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1; -2\}$
 $4(x-1)(x+1) - 1(x+1)(x+2) = 3(x-1)(x+2)$
 $4(x^2-1) - 1(x^2+2x+x+2) = 3(x^2+2x-x-2)$
 $4x^2 - 4 - x^2 - 2x - x - 2 = 3x^2 + 6x - 3x - 6$
 $3x^2 - 6 - 3x = 3x^2 + 3x - 6 \mid -3x^2 \mid +6 \mid -3x$
 $-6x = 0 \mid : (-6)$
 $x = 0$
 $L = \{0\}$

14)
 $\frac{7(x-5)^2}{6x^2-6} = \frac{5x-1}{3x+3} - \frac{3x-2}{6x-6} \mid \cdot 6(x-1)(x+1)$
 $D = \mathbb{R} \setminus \{1; -1\}$
 $7(x-5)^2 = 2(5x-1)(x-1) - (3x-2)(x+1)$
 $7(x^2-10x+25) = 2(5x^2-5x-x+1) - (3x^2+3x-2x-2)$
 $7x^2-70x+175 = 10x^2-10x-2x+2-3x^2-3x+2x+2$
 $7x^2-70x+175 = 7x^2-13x+4 \mid -7x^2 \mid +70x \mid -4$
 $171 = 57x \mid : 57$
 $x = 3$
 $L = \{3\}$

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\set{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

AUFGABEN

1) Geben Sie ein LGS an, das unendlich viele Lösungen besitzt.

2) Geben Sie ein LGS mit 2 Unbekannten an, dessen Lösungsmenge – anschaulich gesprochen – aus allen Punkten des 2-dimensionalen Koordinatensystems besteht.

3) Zahlenrätsel (siehe Unterricht)

Bedingungen für das Zahlenrätsel:

Jeder Buchstabe muss durch eine Ziffer ersetzt werden.

Verschiedene Buchstaben entsprechen verschiedenen Ziffern.

$$\begin{array}{r} E \ R \\ + \ N \ E \\ \hline R \ U \end{array}$$

Geben Sie das zu dem Zahlenrätsel zugehörige Gleichungssystem an.

Keine Lösungsmenge bestimme !!

4) Geben Sie jeweils die Lösungsmenge der folgenden LGS an:

a)	b)	c)	d)
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 8 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 5 & 9 \end{pmatrix}$

e)

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Falls ein LGS unendlich viele Lösungen besitzt, müssen jeweils 2 Lösungen angegeben werden.

Lösungen:

1)

$$x_1 = x_2$$

2)

$$0 \cdot x_1 = 0$$

$$0 \cdot x_2 = 0$$

3)

$$x_1 + x_2 = x_4 + 10 \cdot x_5$$

$$x_1 + x_3 + x_5 = x_2$$

4)

$$a) L = \{(9; 8; 7)\}$$

$$b) L = \{\}$$

c)

$$x_1 = 3 - 2 \cdot x_2$$

$$L = \{(x_1; x_2) \mid x_1 = 3 - 2 \cdot x_2 \wedge x_2 \in \mathbb{R}\}$$

wähle: $x_2 = 1$, dann gilt:

$$x_1 = 3 - 2 \cdot 1 = 1$$

$$\text{also: } (1; 1) \in L$$

d)

$$x_1 = 7 - 4 \cdot x_3$$

$$x_2 = 9 - 5 \cdot x_3$$

$$L = \{(x_1; x_2; x_3) \mid x_1 = 7 - 4 \cdot x_3 \wedge x_2 = 9 - 5 \cdot x_3 \wedge x_3 \in \mathbb{R}\}$$

wähle: $x_3 = 0$, dann gilt:

$$x_1 = 7 - 4 \cdot x_3 = 7 - 4 \cdot 0 = 7$$

$$x_2 = 9 - 5 \cdot x_3 = 9 - 5 \cdot 0 = 9$$

$$\text{also: } (7; 9; 0) \in L$$

wähle: $x_3 = 1$, dann gilt:

$$x_1 = 7 - 4 \cdot x_3 = 7 - 4 \cdot 1 = 3$$

$$x_2 = 9 - 5 \cdot x_3 = 9 - 5 \cdot 1 = 4$$

$$\text{also: } (3; 4; 0) \in L$$

e)

$$x_2 = 2 - 5 \cdot x_3 - 3 \cdot x_1$$

$$x_4 = 3 - 6 \cdot x_3 - 4 \cdot x_1$$

$$L = \{(x_1; x_2; x_3; x_4) \mid x_2 = 2 - 5 \cdot x_3 - 3 \cdot x_1 \wedge x_4 = 3 - 6 \cdot x_3 - 4 \cdot x_1 \wedge x_1 \in \mathbb{R} \wedge x_3 \in \mathbb{R}\}$$

wähle: $x_1 = 0 \wedge x_3 = 1$, dann gilt:

$$x_2 = 2 - 5 \cdot x_3 - 3 \cdot x_1 = 2 - 5 \cdot 1 - 3 \cdot 0 = -3$$

$$x_4 = 3 - 6 \cdot x_3 - 4 \cdot x_1 = 3 - 6 \cdot 1 - 4 \cdot 0 = -3$$

$$\text{also: } (0; -3; 1; -3) \in L$$

wähle: $x_1 = 2 \wedge x_3 = 3$, dann gilt:

$$x_2 = 2 - 5 \cdot x_3 - 3 \cdot x_1 = 2 - 5 \cdot 3 - 3 \cdot 2 = -19$$

$$x_4 = 3 - 6 \cdot x_3 - 4 \cdot x_1 = 3 - 6 \cdot 3 - 4 \cdot 2 = -23$$

$$\text{also: } (0; -19; 1; -23) \in L$$

Name, Vorname:

Hilfsmittel:
keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

AUFGABEN

1) Wie ist $|x|$ definiert ? (5 P)

2) Geben Sie eine Äquivalenzumformung der folgenden Gleichung an: (4 P)
 $x^2 = 25$

3) Vereinfachen Sie, falls dies möglich ist (und so weit wie möglich): (15)

$$\sqrt{z^2} =$$
$$\sqrt{v^3} =$$
$$\sqrt{y^4} =$$

4) Geben Sie die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen an: (21 P)

$$x^2 = -4$$

$$x^2 = 0$$

$$|x| = -5$$

$$x^2 = 0,25$$

$$|x| = x$$

5) Ist folgende Gleichung allgemeingültig? Begründen Sie (konkret)! (5P)

$$\sqrt{x^2} = x$$

Lösungen:

2)

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

$$2) x^2 = 25 \iff x = 5 \vee x = -5$$

3)

$$\sqrt{z^2} = |z|$$

(3 P)

$$\sqrt{v^3} \text{ nicht weiter vereinfachbar}$$

$$\sqrt{y^4} = y^2$$

4)

$$x^2 = -4 \quad L = \{\}$$

$$x^2 = 0 \quad L = \{0\}$$

$$|x| = -5 \quad L = \{\}$$

$$x^2 = 0,25 \quad L = \{0,5; -0,5\}$$

$$|x| = x \quad L = \text{Menge aller positiven reellen Zahlen, einschließlich der } 0$$

5) Ist folgende Gleichung allgemeingültig? Begründen Sie (konkret)!

Nein, da $\sqrt{(-3)^2} = 3$ eine falsche Aussage ist.

Name, Vorname:

Hilfsmittel:
keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punktabzug !!!!

AUFGABEN

1) Gegeben ist die Funktion g mit der Funktionsgleichung 10P

$$g(x) = (\sin(x) + \pi)^2 - \sqrt{x}$$

Berechnen Sie (nur Term angeben, nicht vereinfachen):

$$g(x^2 + \pi)$$

2)

Eine Klassenarbeit wird durch einen linearen Punkteschlüssel korrigiert:

Das bedeutet, dass 50 Punkte mit der Note 1 und 0 Punkte mit der Note 6 bewertet werden.

a) Zeichnen Sie ein rechtwinkliges Koordinatensystem, in dem auf der senkrechten Achse die Note y und auf der waagrechten Achse die Anzahl x der erreichten Punkte eingetragen werden. 4P

(x -Achse: $[-1; +11]$, y -Achse: $[-1; +7]$, LE: 5 Punkte = 1 cm, Eine Note = 1 cm).

Verbinden Sie die Punkte $N_1(50 | 1)$ und $N_6(0 | 6)$ durch die Gerade g .

b) Berechnen Sie die Funktionsgleichung f der Geraden g 10P
Schreibweise wie im Unterricht verwenden, bzw. Berechnung wie im Unterricht machen.

c) Geben Sie den Definitionsbereich der Funktion an. 3P

d) Geben Sie den Wertebereich der Funktion an. 3P

Bem: Das Ergebnis $f(x) = -x / 10 + 6$ muß bei 2e) und 2f) verwendet werden.

e) Welche Note ergeben 28 erreichte Punkte. 10P
Berechnen Sie dies mit Hilfe der Funktionsgleichung der Geradengleichung.
Schreibweise wie im Unterricht verwenden!

f) Wieviel Punkte bekommt man für die Note 2,4 ? 10P
Berechnen Sie dies mit Hilfe der Funktionsgleichung der Geradengleichung und der Punktprobe. Schreibweise wie im Unterricht verwenden!

Lösungen:

1) $g(x^2 + \pi) = (\sin(x^2 + \pi) + \pi)^2 - \sqrt{x^2 + \pi}$

2)

a) Zeichnung

b)

ZPF:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y - 1}{y - 50} = \frac{6 - 1}{0 - 50} \Leftrightarrow \frac{y - 1}{x - 50} = -\frac{5}{50} \Leftrightarrow y - 1 = -\frac{1}{10}(x - 50) \Leftrightarrow$$

$$y - 1 = -\frac{1}{10}x + 5 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{10}x + 6$$

c)

$$D = [0 ; 50]$$

d)

$$W = [1 ; 6]$$

e)

$$f(28) = -\frac{1}{10} \cdot 28 + 6 = 3,2$$

f) Die Punktzahl für die Note 2,4 sei u (wie unbekannt). Der Punkt $P(u \mid 2,4)$ liegt dann auf dem Schaubild K_f (=Gerade g) der Funktion f .

Also erfüllen die Koordinaten dieses Punktes die Funktionsgleichung:

$$2,4 = -\frac{1}{10} \cdot u + 6 \Leftrightarrow -3,6 = -\frac{1}{10} \cdot u \Leftrightarrow u = 36$$

KLAUSUR 3 Mathematik 1 2BKI1 Nachtermin Zeit: 60 Minuten

Name, Vorname:

Hilfsmittel:
keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

AUFGABEN

Bemerkung:

Machen Sie, falls möglich, jeweils die zeichnerische und rechnerische Probe.

1) 15P

a) K_g ist eine Gerade mit $P_1(-5 \mid -1) \in K_g$ und $P_2(2 \mid -3,8) \in K_g$
Geben Sie (berechnen !) Sie die Funktionsgleichung g dieser Geraden.

b) Gegeben ist die Funktionen f_1 (Die Definitionsmenge und die Zielmenge ist jeweils \mathbb{R}) mit der Funktionsgleichung: 5P

$$f_1(x) = -\frac{2}{5}x - 3$$

Zeichnen Sie das Schaubild K_{f_1} von f_1 in ein rechtwinkliges Koordinatensystem

c) Die Parallele K_{f_2} zu K_{f_1} geht durch den Punkt $P_1(3 \mid 0,8)$. 15P

Zeichnen Sie diese Parallele in das obige Koordinatensystem ein.
Berechnen Sie die Funktionsgleichung von K_{f_2} ?

d) Die Senkrechte K_{f_3} auf K_{f_1} geht durch den Punkt $P_2(-3 \mid -4,5)$. 15P

Zeichnen Sie diese Senkrechte in das obige Koordinatensystem ein.
Bestimmen Sie rechnerisch die Funktionsgleichung der Senkrechten K_{f_3}

Lösungen:

1)

a)

15P

ZPF:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y - (-1)}{x - (-5)} = \frac{-3,8 - (-1)}{2 - (-5)} \iff \frac{y+1}{x+5} = \frac{-2,8}{7} \iff \frac{y+1}{x+5} = -0,4 \iff \frac{y+1}{x+5} = -0,4 \iff$$

$$y+1 = -0,4(x+5) \iff y+1 = -0,4x - 2 \iff y = -0,4x - 3$$

also:

$$g(x) = -0,4x - 3$$

Probe:

$$a1) P_1(-5 \mid -1) \in K_g \iff -1 = -0,4 \cdot (-5) - 3 \iff -1 = 2 - 3 \iff -1 = -1 \text{ (wahr)}$$

$$a2) P_2(2 \mid -3,8) \in K_g \iff -3,8 = -0,4 \cdot 2 - 3 \iff -3,8 = -0,8 - 3 \iff -3,8 = -3,8 \text{ (wahr)}$$

Bem: weitere Probe durch Vergleich mit der Zeichnung

b) Zeichnung

5P

c)

15P

K_{f2} hat die gleiche Steigung wie K_{f1} , also $-\frac{2}{5}$.

Nach der PSF gilt allgemein:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$$

$$\frac{y - 0,8}{x - 3} = -\frac{2}{5} \iff y - 0,8 = -\frac{2}{5}(x - 3) \iff y - 0,8 = -\frac{2}{5}x + \frac{6}{5} \iff$$

$$y = -\frac{2}{5}x + 2$$

also:

$$f_2(x) = -\frac{2}{5}x + 2$$

Probe:

$$P_1(3 \mid 0,8) \in K_{f2} \iff 0,8 = -\frac{2}{5} \cdot 3 + 2 \iff 0,8 = -\frac{6}{5} + 2 \iff 0,8 = 0,8 \text{ (wahr)}$$

Bem: weitere Probe durch Vergleich mit der Zeichnung

d)

15P

K_{f3} hat die Steigung m . Für diese Steigung gilt:

$$m_s = \frac{-1}{\frac{2}{-5}} = \frac{5}{2}.$$

Nach der PSF gilt allgemein:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m_s$$

$$\frac{y - (-4,5)}{x - (-3)} = \frac{5}{2} \iff \frac{y + 4,5}{x + 3} = \frac{5}{2} \iff y + 4,5 = \frac{5}{2}(x + 3) \iff$$

$$y + 4,5 = \frac{5}{2}x + \frac{15}{2} \iff y = \frac{5}{2}x + 3$$

also:

$$f_3(x) = \frac{5}{2}x + 3$$

Probe:

$$P_2(-3 \mid -4,5) \in K_{f3} \iff -4,5 = \frac{5}{2} \cdot (-3) + 3 \iff -4,5 = \frac{-15}{2} + 3 \iff -4,5 = -4,5 \text{ (wahr)}$$

Bem: weitere Probe durch Vergleich mit der Zeichnung

*Name, Vorname:*Hilfsmittel:
keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punktabzug !!!!

AUFGABEN

1) 8P
Geben Sie die Nullstellen der zu der folgenden Funktionsgleichung zugehörenden Kurve K_f an:

$$f(x) = 7 \cdot (x + 2)^3 \cdot (x - 3)^2 \cdot (x + 1) \cdot (x - 1)$$

Begründen Sie Ihre Lösung!

2) 7P
gegeben:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2$$

K_h entsteht durch Verschiebung von K_f um +5 in x-Richtung und um +1 in y-Richtung
Welche Funktionsgleichung besitzt K_h ?

3) 10P
Welche Symmetrieeigenschaften hat das Schaubild der folgenden Funktion ?
Begründen Sie mathematisch !!

$$h(x) = 2x - \frac{1}{4}x^3 - 3x^5$$

4) 10P
Berechnen Sie mittels Polynomdivision:
 $(2 \cdot x^4 - 6 \cdot x^3 - 6 \cdot x^2 + 22 \cdot x - 12) : (x-1)$

5) 15P
Eine Parabel hat die Funktionsgleichung:

$$f(x) = \frac{2}{5}x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{4}{9}$$

Bestimmen Sie den Scheitel der Parabel mit Hilfe der quadratischen Ergänzung.

Lösungen:

1)

x_S sei eine Nullstelle. Damit gilt:

$$7 \cdot (x_S + 2)^3 \cdot (x_S - 3)^2 \cdot (x_S + 1) \cdot (x_S - 1) = 0$$

Ein Produkt wird genau dann Null, wenn eines ihrer Faktoren Null wird, also:

$$x_{S1} = -2$$

$$x_{S2} = 3$$

$$x_{S3} = -1$$

$$x_{S4} = 1$$

2)

$$h(x) = \frac{1}{4}(x-5)^2 + 1$$

3)

$$h(-x) = 2 \cdot (-x) - \frac{1}{4} \cdot (-x)^3 - 3(-x)^5 = -2x - \frac{1}{4} \cdot (-x^3) - 3 \cdot (-x^5) = -2x + \frac{1}{4} \cdot x^3 + 3x^5$$

$$-h(x) = -(2x - \frac{1}{4}x^3 - 3x^5) = -2x + \frac{1}{4}x^3 + 3x^5$$

also:

$$h(-x) = -h(x) \implies \text{Punktsymmetrie bzgl. Ursprung } O(0 | 0)$$

4)

$$(2 \cdot x^4 - 6 \cdot x^3 - 6 \cdot x^2 + 22 \cdot x - 12) : (x-1) = 2 \cdot x^3 - 4x^2 - 10x + 12$$

$$\begin{array}{r} -2 \cdot x^4 + 2 \cdot x^3 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -4 \cdot x^3 - 6 \cdot x^2 + 22 \cdot x - 12 \\ +4 \cdot x^3 - 4 \cdot x^2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -10x^2 + 22x - 12 \\ +10x^2 - 10x \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12x - 12 \\ -12x + 12 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0 \end{array}$$

5)

$$f(x) = \frac{2}{5}x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{4}{9}$$

1. Schritt: Ausklammern von $\frac{2}{5}$

$$f(x) = \frac{2}{5}x^2 - \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{8}{3}x + \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{4}{9}$$

$$f(x) = \frac{2}{5}\left(x^2 - \frac{5}{2} \cdot \frac{8}{3}x + \frac{5}{2} \cdot \frac{4}{9}\right)$$

$$f(x) = \frac{2}{5}\left(x^2 - \frac{20}{3}x + \frac{10}{9}\right)$$

2. Schritt: Quadratische Ergänzung

$$f(x) = \frac{2}{5}\left(x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{20}{3}x + \frac{10}{9}\right)$$

$$f(x) = \frac{2}{5}\left(x^2 - 2 \cdot \frac{10}{3}x + \frac{10}{9}\right)$$

$$f(x) = \frac{2}{5}\left[x^2 - 2 \cdot \frac{10}{3}x + \left(\frac{10}{3}\right)^2 - \left(\frac{10}{3}\right)^2 + \frac{10}{9}\right]$$

$$f(x) = \frac{2}{5}\left[\left(x - \frac{10}{3}\right)^2 - \left(\frac{10}{3}\right)^2 + \frac{10}{9}\right]$$

$$f(x) = \frac{2}{5}\left[\left(x - \frac{10}{3}\right)^2 - \frac{100}{9} + \frac{10}{9}\right]$$

$$f(x) = \frac{2}{5}\left[\left(x - \frac{10}{3}\right)^2 + \frac{-100 + 10}{9}\right]$$

$$f(x) = \frac{2}{5}\left[\left(x - \frac{10}{3}\right)^2 - 10\right]$$

$$f(x) = \frac{2}{5}\left(x - \frac{10}{3}\right)^2 - \frac{2}{5} \cdot 10$$

$$f(x) = \frac{2}{5}\left(x - \frac{10}{3}\right)^2 - 4$$

also (ablesen):

$$S\left(\frac{10}{3} \mid -4\right)$$

Name, Vorname:

Hilfsmittel:
keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

AUFGABEN

Bemerkungen:

Bezeichnungen und Rechengänge wie im Unterricht.

1) 14P

Gegeben ist die Funktion mit der folgenden Funktionsgleichung:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x^2 + 9x$$

Bestimmen Sie die Extrempunkte und Wendepunkte der zugehörigen Kurve.

2) 36P

Legen Sie von $P(-2 \mid 1)$ aus die Tangenten an die Parabel mit der Funktionsgleichung

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{13}{4}$$

Bestimmen Sie die Berührungspunkte und die Funktionsgleichungen der Tangenten.

Bemerkung:

Es muß die sogenannte Tangentenbedingung benutzt werden.

Lösungen

Aufgabe 1)

a) Ableitungen

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x^2 + 9x$$

$$f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 6x + 9$$

$$f''(x) = \frac{3}{2}x - 6$$

$$f'''(x) = \frac{3}{2}$$

b) Extrempunkte

Extrempunkte $E(x_e|y_e)$: $f'(x_e) = 0$

$$0 = \frac{3}{4}x_e^2 - 6x_e + 9 \quad | \cdot \frac{4}{3}$$

$$0 = x_e^2 - 8x_e + 12$$

$$x_{e1/2} = \frac{8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12}}{2 \cdot 1} = \frac{8 \pm 4}{2} = 4 \pm 2$$

$$x_{e1} = 2$$

$$x_{e2} = 6$$

$$f''(2) = \frac{3}{2} \cdot 2 - 6 = -3 < 0 \implies \text{Hochpunkt}$$

$$f''(6) = \frac{3}{2} \cdot 6 - 6 = 3 > 0 \implies \text{Tiefpunkt}$$

$$y_{e1} = f(2) = \frac{1}{4} \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 9 \cdot 2 = 8$$

$$y_{e2} = f(6) = \frac{1}{4} \cdot 6^3 - 3 \cdot 6^2 + 9 \cdot 6 = 0$$

damit

T(2 | 8) Hochpunkt, H(6 | 0) Tiefpunkt

c) Wendepunkte

Wendepunkte $W(x_w|y_w)$: $f''(x_w) = 0$

$$0 = \frac{3}{2}x_w - 6 \quad | \cdot 2$$

$$0 = 3x_w - 12$$

$$x_w = 4$$

$$f'''(4) = \frac{3}{2} \neq 0 \implies \text{Wendepunkt}$$

$$y_w = f(4) = \frac{1}{4} \cdot 4^3 - 3 \cdot 4^2 + 9 \cdot 4 = 4$$

damit:

W(4 | 4) Wendepunkt

Aufgabe 2)

1) Ableitung

$$f'(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$$

2) Tangentenbedingung, kurz TB

Der gesuchte Berührungspunkt sei $B(x_B, y_B)$.

Die ZPF der Geradengleichung ergibt die sogenannte Tangentenbedingung:

$$\frac{y_B - 1}{x_B - (-2)} = f'(x_B) \quad (\text{TB})$$

Es gilt aber:

$$y_B = -\frac{1}{4}x_B^2 - \frac{3}{2}x_B - \frac{13}{4} \quad \text{und} \quad f'(x_B) = -\frac{1}{2}x_B - \frac{3}{2}$$

Setze dies in (TB) ein. Das ergibt dann:

$$\frac{-\frac{1}{4}x_B^2 - \frac{3}{2}x_B - \frac{13}{4} - 1}{x_B + 2} = -\frac{1}{2}x_B - \frac{3}{2} \iff -\frac{1}{4}x_B^2 - \frac{3}{2}x_B - \frac{17}{4} = -\frac{1}{2}x_B^2 - \frac{3}{2}x_B - x_B - 3 \iff$$

$$\frac{1}{4}x_B^2 + x_B - \frac{5}{4} = 0 \iff x_B^2 + 4x_B - 5 = 0$$

also:

$$x_{B1} = -5, \quad y_{B1} = f(-5) = -2$$

$$x_{B2} = 1, \quad y_{B2} = f(1) = -5$$

damit:

$$B_1(-5 \mid -2)$$

$$B_2(1 \mid -5)$$

3) Berechnung der Tangentensteigungen

$$\text{Steigung der Tangente } t_1: \quad f'(-5) = -\frac{1}{2} \cdot (-5) - \frac{3}{2} = 1$$

$$\text{Steigung der Tangente } t_2: \quad f'(1) = -\frac{1}{2} \cdot 1 - \frac{3}{2} = -2$$

4) Berechnung der Funktionsgleichungen der Tangenten

a) Nach der PSF gilt für t_1 :

$$\frac{y - (-2)}{x - (-5)} = 1 \iff y = x + 3, \text{ also:}$$

$$t_1: y = x + 3$$

b) Nach der PSF gilt für t_2 :

$$\frac{y - (-5)}{x - 1} = -2 \iff y = -2x - 3, \text{ also:}$$

$$t_2: y = -2x - 3$$

KLAUSUR 4 Mathematik 1 2BKI1 Nachtermin 1 Zeit: 45 Minuten

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

AUFGABEN

Bemerkungen:

Bezeichnungen und Rechengänge wie im Unterricht.

1) 5P

Wie groß ist das Anfangskapital, das sich bei einer jährlichen Verzinsung von 6 % Jahreszinssatz in 5 Jahren auf 1000 Euro vermehrt ?

2) 10P

In wie viel Jahren vermehrt sich ein Anfangskapital bei einer jährlichen Verzinsung von 5 % Jahreszinssatz auf das Doppelte ?

15P

3) 15P

In Abhängigkeit der Zeit gilt beim Entladevorgang des Kondensators:

$$U = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}; \text{ wobei } U_0 \neq 0, R \neq 0, C \neq 0$$

Lösen Sie diese Gleichung nach t auf (umformen nach t).

4) 20P

14P

Wie heißt die Funktionsgleichung der Ursprungsgeraden, die das Schaubild der Funktion mit der Funktionsgleichung:

$$h(x) = e^x$$

berührt ?

Geben Sie den Berührungspunkt an.

Lösungen:

1)

$$K_5 = K_0 \cdot 1,06^5$$

$$K_5 = 1000$$

also:

$$K_0 \cdot 1,06^5 = 1000 \iff K_0 = \frac{1000}{1,06^5} \iff$$

$$K_0 \approx 747,26$$

2)

$$K_n = K_0 \cdot 1,05^n$$

$$K_n = 2 \cdot K_0$$

also:

$$K_0 \cdot 1,05^n = 2K_0 \iff 1,05^n = 2 \iff n = \log_{1,05} 2 = \frac{\ln 2}{\ln 1,05}$$

$$n \approx 14,21$$

3)

$$U(t) = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \quad | : U_0$$

$$e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{U}{U_0}$$

$$-\frac{t}{RC} = \log_e \frac{U}{U_0} = \ln \frac{U}{U_0}$$

$$t = -RC \cdot \ln \frac{U}{U_0}$$

4) Der gesuchte Berührungspunkt sei $B(x_B, y_B)$.

Die ZPF der Geradengleichung ergibt die sogenannte Tangentenbedingung:

$$\frac{h(x_B) - 0}{x_B - 0} = h'(x_B) \quad (\text{TB})$$

Es gilt aber:

$$h(x_B) = x_B \text{ und } h'(x_B) = e^{x_B}$$

Setze dies in (TB) ein. Das ergibt dann:

$$\frac{e^{x_B} - 0}{x_B - 0} = e^{x_B}$$

$$\frac{e^{x_B}}{x_B} = e^{x_B} \iff \frac{1}{x_B} = 1 \iff x_B = 1$$

$$x_B = 1 \text{ und } y_B = h(1) = e^1 = e$$

also: $B(1 | e)$

KLAUSUR 4 Mathematik 1 2BKI1 Nachtermin 2 Zeit: 45 Minuten

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punktabzug !!!!

AUFGABEN

Bemerkungen:

Bezeichnungen und Rechengänge wie im Unterricht.

1) 10P

Für welches g wird die Fläche unter der Kurve der e-Funktion, der x-Achse und zwischen den Geraden $x = -1$ und $x = 0$ so groß wie die Fläche unter der Kurve der e-Funktion, der x-Achse und zwischen den Geraden $x = 0$ und $x = g$. Machen Sie dazu eine Skizze.

2) 10P

Ein Bankkunde will in 5 Jahren bei 4,5 % Jahreszinssatz 2500 Euro verdienen.

Wieviel Geld muß er einlegen ?

3) 20P

Von einer radioaktiven Substanz sind nach einer Stunde noch 400 mg, nach 2 Stunden noch 300 mg vorhanden. Wie lautet das Zerfallsgesetz ?

4) 10P

Geben Sie die Exponentialfunktion der Form

$$f(x) = c \cdot a^x \quad (a > 0)$$

an, die durch die folgenden Punkte geht:

$P(0|6)$, $Q(5|2)$

Lösungen:

1)

$$\int_{-1}^0 e^x dx = \int_0^g e^x dx \iff [e^x]_{-1}^0 = [e^x]_0^g \iff e^0 - e^{-1} = e^g - e^0 \iff 1 - \frac{1}{e} = e^g - 1 \iff e^g = 2 - \frac{1}{e} \iff g = \ln\left(2 - \frac{1}{e}\right)$$

2)

gegeben: $p = 4,5 \implies q = 1,045$; $n = 5$;

gesucht: K_0 ; K_5

Es gilt:

$$K_5 = K_0 + 2500$$

$$K_5 = K_0 \cdot 1,05^n$$

also:

$$K_0 + 2500 = K_0 \cdot 1,05^n$$

$$K_0 \cdot 1,05^n - K_0 = 2500$$

$$K_0(1,05^n - 1) = 2500$$

$$K_0 = \frac{2500}{(1,05^n - 1)}$$

$$K_0 \approx 10155,09$$

Ergebnis:

Das eingelegte Kapital muss 10155,09 Euro betragen.

3)

1. Lösung

Für das Wachstumsgesetz gilt:

gegeben:

$$m(t) = m_0 \cdot q^t \quad (t \text{ in Stunden, } m \text{ in mg})$$

gesucht:

q und m_0

Nach 1 h sind noch 400 mg vorhanden, also:

$$m(1) = 400 \text{ und}$$

$$m(1) = m_0 \cdot q^1$$

damit:

$$400 = m_0 \cdot q^1 \text{ bzw. vereinfacht:}$$

$$(G1) \quad 400 = m_0 \cdot q$$

Nach 2 h sind noch 300 mg vorhanden, also:

$$m(2) = 300 \text{ und}$$

$$m(2) = m_0 \cdot q^2$$

damit:

$$(G2) \quad 300 = m_0 \cdot q^2$$

Man hat also 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten. Jeweils auflösen nach m_0 :

$$m_0 = \frac{400}{q}$$

$$m_0 = \frac{300}{q^2}$$

gleichsetzen ergibt:

$$\frac{400}{q} = \frac{300}{q^2} \quad | \cdot q^2$$

$$400 q = 300$$

ergibt:

$$q = 3/4 \text{ und}$$

$$m_0 = \frac{400}{q} = \frac{400}{0,75} = \frac{1600}{3}$$

Damit:

$$m(t) = \frac{1600}{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^t$$

4)

$P \in K_f$ und $Q \in K_f$, also:

$$6 = c \cdot a^0 \quad (G11)$$

$$2 = c \cdot a^5 \quad (G12)$$

$$c = 6 \quad (G21)$$

$$2 = c \cdot a^5 \quad (G12)$$

$$c = 6$$

$$a = \sqrt[5]{\frac{1}{3}}$$

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punktabzug !!!!

AUFGABEN

Bemerkungen:

Bezeichnungen und Rechengänge wie im Unterricht.

1)

1) Lösen Sie die Gleichung $r^x = s$ (wobei $r > 0$, $r \neq 1$, $s > 0$) auf nach:a) x

1P

b) r

1P

2) Formen Sie in möglichst einfache Terme um (falls dies nicht möglich ist, schreiben sie "keine Umformung möglich"):

a) $\log_{10}(a \cdot a)$

2P

b) $\ln(x - y)$

2P

c) $\ln\left(\frac{1}{e^2}\right)$

2P

d) $\log_a 1$

1P

e) $\log_a a$

1P

f) $\log_a a^x$

2P

g) $\log_a ((a^n)^m)$

3P

h) $\log_a \frac{a^n}{a^m}$

3P

3) 16P

Vereinfachen Sie die folgenden Terme

a) $\log_a \frac{x^2 \cdot \sqrt{y}}{z^3 \cdot \sqrt[4]{u}}$ b) $\log_u \frac{3u^2}{4\sqrt{v}}$

4) 16P

Bestimmen Sie die Lösungsmenge:

a) $9 \cdot 3^{2x} = 3^{x+1}$ b) $3 \cdot 5^x = 7^{x-1}$

Lösungen:

1)

a) $x = \log_r s$

b) $r = \sqrt[x]{s} = s^{1/x}$

2)

a) $\log_{10}(a \cdot a) = \log_{10} a^2 = 2 \log_{10} a$

b) $\ln(x - y)$ "keine Umformung möglich"

c) $\ln\left(\frac{1}{e^2}\right) = \ln(e^{-2}) = -2 \ln e = -2$

d) $\log_a 1 = 0$

e) $\log_a a = 1$

f) $\log_a a^x = x$

g) $\log_a ((a^n)^m) = \log_a (a^{nm}) = nm \cdot \log_a a = nm$

h) $\log_a \frac{a^n}{a^m} = \log_a a^{n-m} = (n-m) \log_a a = n-m$

3)

a) $\log_a \frac{x^2 \cdot \sqrt{y}}{z^3 \cdot \sqrt[4]{u}} = \log_a (x^2 \cdot \sqrt{y}) - \log_a (z^3 \cdot \sqrt[4]{u}) = \log_a (x^2 \cdot y^{\frac{1}{2}}) - \log_a (z^3 \cdot u^{\frac{1}{4}}) =$

$$\log_a x^2 + \log_a y^{\frac{1}{2}} - \log_a z^3 - \log_a u^{\frac{1}{4}} = 2 \log_a x + \frac{1}{2} \log_a y - 3 \log_a z - \frac{1}{4} \log_a u$$

b) $\log_u \frac{3u^2}{4\sqrt{v}} = \log_u (3u^2) - \log_u (4\sqrt{v}) = \log_u 3 + \log_u u^2 - \log_u 4 - \log_u \sqrt{v} =$

$$\log_u 3 + 2 - \log_u 4 - \log_u v^{\frac{1}{2}} = \log_u 3 + 2 - \log_u 4 - \frac{1}{2} \log_u v$$

4)

a) $9 \cdot 3^{2x} = 3^{x+1} \quad D = R$

1. Lösung :

$$9 = \frac{3^{x+1}}{3^{2x}} \Leftrightarrow 9 = 3^{x+1-2x} \Leftrightarrow 9 = 3^{-x+1} \Leftrightarrow$$

$$-x+1 = \log_3 9 \Leftrightarrow x = 1 - \log_3 9 \Leftrightarrow$$

$$x = 1 - 2 \Leftrightarrow x = -1$$

2. Lösung :

$$\ln(9 \cdot 3^{2x}) = \ln(3^{x+1}) \Leftrightarrow \ln 9 + \ln 3^{2x} = (x+1) \ln 3 \Leftrightarrow$$

$$\ln 9 + 2x \ln 3 = x \ln 3 + \ln 3 \Leftrightarrow x \ln 3 = \ln 3 - \ln 9 \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{\ln 3 - \ln 9}{\ln 3} \Leftrightarrow x = \frac{\ln(1/3)}{\ln 3} = \frac{\ln 3^{-1}}{\ln 3} = \frac{-1 \cdot \ln 3}{\ln 3} \Leftrightarrow$$

$$x = -1$$

$$b) \quad 3 \cdot 5^x = 7^{x-1} \quad D = R \Leftrightarrow$$

$$3 \cdot 5^x = \frac{7^x}{7} \Leftrightarrow 21 \cdot 5^x = 7^x \Leftrightarrow 21 = \frac{7^x}{5^x} \Leftrightarrow$$

$$21 = \left(\frac{7}{5}\right)^x \Leftrightarrow x = \log_{7/5} 21 \Leftrightarrow x = \frac{\ln 21}{\ln(7/5)} \Leftrightarrow$$

$$x \approx 9,05$$