

Name, Vorname:

Hilfsmittel:
keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punktabzug !!!!

AUFGABEN

Geben Sie die Definitionen folgender Begriffe an:

1) Aussage

2) Aussageform

3) allgemeingültig

4) Teilmenge

5) Vereinigung zweier Mengen

6) Durchschnitt zweier Mengen

7) Term

8) Gleichung

9) Definitionsmenge

10) Lösungsmenge

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punktabzug !!!!

AUFGABEN

I) Bestimmen Sie die Mengen (keine Venn – Diagramme)

1) gegeben: $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 2\}$ gesucht: $A \cup B$ 2) gegeben: $E = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$, $F = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 2\}$ gesucht: $E \cap F$

II) Formen Sie die Terme so um, daß sich allgemeingültige Gleichungen ergeben.

3) $17a - 23b + 35c - 9a - 41c + 30b$ 4) $\frac{20a^2 + 15ab - 35ac}{5a}$

5) $\frac{38u^2 - 57uv}{2u - 3v}$ 6) $\frac{ax - ay}{5x - 5y}$ 7) $\frac{\frac{a}{b} + 1}{\frac{b}{a} + 1}$ 8) $\frac{2x + 1}{x} - \frac{x + 1}{x}$

III) Die Grundmenge ist $G = \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Definitionsmenge D und die Lösungsmenge L der Gleichungen.

Machen Sie dazu die Probe.

9) $\frac{2}{x+1} = \frac{3}{x-1}$ 10) $\frac{-3}{2-x} = \frac{3}{x-2}$ 11) $\frac{2-x}{3-x} - 1 = \frac{4-x}{x-3}$

12) $\frac{3}{x+4} - \frac{2}{x-4} = \frac{5x-20}{x^2-16}$ 13) $\frac{4}{x+2} - \frac{1}{x-1} = \frac{3}{x+1}$

14) $\frac{7(x-5)^2}{6x^2-6} = \frac{5x-1}{3x+3} - \frac{3x-2}{6x-6}$

Lösungen:

1) $A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 2\}$

2) $E \cap F = \emptyset$

3) $17a - 23b + 35c - 9a - 41c + 30b = 8a + 7b - 6c$

4) $\frac{20a^2 + 15ab - 35ac}{5a} = \frac{20a^2}{5a} + \frac{15ab}{5a} - \frac{35ac}{5a} = 4a + 3b - 7c$

5) $\frac{38u^2 - 57uv}{2u - 3v} = \frac{19u(2u - 3v)}{2u - 3v} = 19u$

6) $\frac{ax - ay}{5x - 5y} = \frac{a(x-y)}{5(x-y)} = \frac{a}{5}$

7) $\frac{\frac{a}{b} + 1}{\frac{b}{a} + 1} = \frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{b}}{\frac{b}{a} + \frac{a}{a}} = \frac{\frac{a+b}{b}}{\frac{b+a}{a}} = \frac{(a+b)a}{b(a+b)} = \frac{a}{b}$

8) $\frac{2x+1}{x} - \frac{x+1}{x} = \frac{2x+1-(x+1)}{x} = \frac{2x+1-x-1}{x} = 1$

9)

$$\frac{2}{x+1} = \frac{3}{x-1} \mid \cdot (x+1)(x-1)$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{1; -1\}$$

$$L = \{-5\}$$

10)

$$\frac{-3}{2-x} = \frac{3}{x-2} \mid \cdot (2-x)(x-2)$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

$$L = \mathbb{R}$$

11)

$$\frac{2-x}{3-x} - 1 = \frac{4-x}{x-3}$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$$

$$x = 3$$

$$L = \{\}$$

12)

$$\frac{3}{x+4} - \frac{2}{x-4} = \frac{5x-20}{x^2-16} \mid \cdot (x^2-16)$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{4; -4\}$$

$$3(x-4) - 2(x+4) = 5x - 20$$

$$3x - 12 - 2x - 8 = 5x - 20$$

$$x - 20 = 5x - 20 \mid \cdot +20 \mid \cdot -5x$$

$$-4x = 0$$

$$L = \{0\}$$

13)

$$\frac{4}{x+2} - \frac{1}{x-1} = \frac{3}{x+1} \mid \cdot (x-1)(x+1)(x+2)$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1; -2\}$$

$$4(x-1)(x+1) - 1(x+1)(x+2) = 3(x-1)(x+2)$$

$$4(x^2-1) - 1(x^2+2x+x+2) = 3(x^2+2x-x-2)$$

$$4x^2 - 4 - x^2 - 2x - x - 2 = 3x^2 + 6x - 3x - 6$$

$$3x^2 - 6 - 3x = 3x^2 + 3x - 6 \mid -3x^2 \mid +6 \mid -3x$$

$$-6x = 0 \mid :(-6)$$

$$x = 0$$

$$L = \{0\}$$

14)

$$\frac{7(x-5)^2}{6x^2-6} = \frac{5x-1}{3x+3} - \frac{3x-2}{6x-6} \mid \cdot 6(x-1)(x+1)$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{1; -1\}$$

$$7(x-5)^2 = 2(5x-1)(x-1) - (3x-2)(x+1)$$

$$7(x^2-10x+25) = 2(5x^2-5x-x+1) - (3x^2+3x-2x-2)$$

$$7x^2 - 70x + 175 = 10x^2 - 10x - 2x + 2 - 3x^2 - 3x + 2x + 2$$

$$7x^2 - 70x + 175 = 7x^2 - 13x + 4 \mid -7x^2 \mid +70x \mid -4$$

$$171 = 57x \mid :57$$

$$x = 3$$

$$L = \{3\}$$

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

AUFGABEN

1) Geben Sie je ein Beispiel für eine Aussage, eine Aussageform und eine Äquivalenzumformung.

2) Welcher mengentheoretische Zusammenhang besteht zwischen der Grundmenge G , der Definitionsmenge D und der Lösungsmenge L ?

Keine verbalen Erklärungen ! Benutzen Sie stattdessen die Fachsprache der Mengenlehre.

3) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 5\}$; $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 5\}$

Welche folgenden Gebilde sind sinnlos, wahr, falsch ?

a) $A \vee B$ b) $3 \in B$ c) $3 \cup 5$ d) $2 \in 20$ e) $A \in B$ f) $B \subset A$ g) $7,6 \notin A$ h) $\{4\} \subset A$

4) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 5\}$; $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 5\}$. Bestimmen Sie:

a) $A \cup B$ b) $A \cap B$ c) $A \setminus B$ d) $B \setminus A$

5) Vereinfachen Sie die folgenden Terme:

a) $\frac{ax^2 - ay^2}{x + y}$

b) $\frac{a-b}{b-a}$

Die Grundmenge G bei den folgenden Gleichungen ist: $G = \mathbb{R}$ = Menge der reellen Zahlen.

Bestimmen Sie die Definitionsmenge D und die Lösungsmenge L folgender Gleichungen:

Machen Sie bei jeder Aufgabe - falls die Lösungsmenge nicht leer bzw. nicht unendlich groß ist - die Probe.

8) $\frac{7x}{10} - \frac{2}{5} = \frac{x}{2}$

9) $\frac{1}{x-3} - 2 = \frac{1}{2(x-3)}$

10) $\frac{1}{x} + \frac{x}{x-1} = 1$

11) $\frac{2x+4}{x+2} = \frac{6(x+2)}{3x+6}$

Lösungen:

1) aufzählende Form, beschreibende Form, Venn-Diagramme.

$$2) C \setminus D = \{x \mid x \in C \wedge x \notin D\}$$

3) $3 = 6$ ist eine Aussage; $x + x = 3x$ ist eine Aussageform;
 $2x + 4 = 10x \Leftrightarrow 4 = 8x$ ist eine Äquivalenzumformung

$$4) L \subset D \subset G$$

5)

a) sinnlos b) falsch c) sinnlos d) sinnlos e) falsch f) falsch g) wahr h) wahr

6)

a) \mathbb{R} b) $\{5\}$ c) $A \setminus \{5\}$ oder auch $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 5\}$ d) $B \setminus \{5\}$ oder auch $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 5\}$

7) Vereinfachen Sie die folgenden Terme:

$$a) = a(x^2 - y^2)/(x + y) = a(x - y)(x + y)/(x + y) = a(x - y)$$

$$b) -1$$

$$8) D = \mathbb{R}$$

$$\frac{7x}{10} - \frac{2}{5} = \frac{x}{2} \quad | \cdot 10$$

$$7x - 4 = 5x$$

$$2x = 4$$

$$x = 2$$

$$L = \{2\}$$

$$10) D = \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{x}{x-1} = 1 \quad | \cdot x(x-1)$$

$$x - 1 + x^2 = x(x - 1)$$

$$x - 1 + x^2 = x^2 - x$$

$$2x = 1$$

$$x = 0,5$$

$$L = \{0,5\}$$

$$9) D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$$

$$\frac{1}{x-3} - 2 = \frac{1}{2(x-3)} \quad | \cdot 2(x-3)$$

$$2 - 4(x-3) = 1$$

$$2 - 4x + 12 = 1$$

$$4x = 13$$

$$x = 13/4$$

$$L = \{13/4\}$$

$$11) D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$$

$$\frac{2x+4}{x+2} = \frac{6(x+2)}{3x+6} \quad | \cdot 3(x+2)$$

$$3(2x+4) = 6(x+2)$$

$$6x + 12 = 6x + 12$$

$$6x = 6x$$

$$L = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$$

Name, Vorname:

Hilfsmittel:
keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punktabzug !!!!

AUFGABEN

- 1) Wie ist $|x|$ definiert ? (1 P)
- 2) Geben Sie die Definition des Begriffs "Definitions Menge" (2 P)
- 3) Geben Sie die Definition des Begriffs "Lösungsmenge" (2 P)
- 4) Geben Sie die Definition des Begriffs Äquivalenzumformung (keine Regeln angeben) (2 P)
- 5) Geben Sie eine Äquivalenzumformung der folgenden Gleichung an: (2 P)
 $x^2 = 25$
- 6) Machen Sie die quadratische Ergänzung zum folgenden Term: (3 P)
$$x^2 - \frac{7}{3}x + ? = (? - ?)^2$$
- 7) $\sqrt{z^2} =$ (2 P)
- 8) Geben Sie die Lösungsmenge der folgenden Gleichung an: (2 P)
 $x^2 = -4$
- 9) Bestimmen Sie die Lösung der folgenden Gleichung durch Äquivalenzumformungen (nicht durch "Mitternachtsformel") (4 P)
 $(x - 1)^2 = 16$

Lösungen:

1)

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

2) Die Definitionsmenge einer Gleichung bzgl. der Grundmenge G ist die Menge aller Zahlen (aus der Grundmenge G) für die beim Einsetzen (in die Variablen) in die Gleichung Aussagen entstehen.

3) Die Lösungsmenge L einer Gleichung bzgl. der Grundmenge G ist die Menge aller Zahlen (aus der Definitionsmenge D), für die die Einsetzungen (in die Variablen) in die Gleichung wahre Aussagen ergeben.

4) Wenn bei einer Umformung die umzuformende Gleichung und die umgeformte Gleichung dieselbe Lösungsmenge haben, dann heißt diese Umformung eine Äquivalenzumformung.

5) $x^2 = 25 \iff x = 5 \vee x = -5$

6)

$$x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{3} x + ? = x^2 - 2 \cdot \frac{7}{6} x + \left(\frac{7}{6}\right)^2 = \left(x - \frac{7}{6}\right)^2$$

7) $\sqrt{z^2} = |z|$

8)

$$L = \{\}$$

9)

$$(x - 1)^2 = 16 \iff (\text{Wurzelziehen auf beiden Seiten})$$

$$|x - 1| = \sqrt{16} = 4 \iff$$

$$x - 1 = 4 \vee x - 1 = -4 \iff$$

$$x = 5 \vee x = -3 \iff$$

also:

$$L = \{-3; 5\}$$

Name, Vorname:

Hilfsmittel:
keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punktabzug !!!!

AUFGABEN

- 1) Geben Sie die Definitionen folgender Begriffe an: 6P
a) Funktion,
b) Punktprobe
- 2) Geben Sie ein Schaubild an, das nicht zu einer Funktion gehört. 1P
- 3) Geben Sie die größtmögliche Definitionsmenge D der folgenden Funktion h an: 1P
$$h(x) = \frac{1}{x}$$
- 4) Gegeben sei die Funktion $f(x) = 2x+1$ 6P
Bestimmen Sie
 $f(x^2)$, $f(2x)$, $f(x+1)$
- 5) Welche 3 Möglichkeiten gibt es, eine Funktion darzustellen? 3P
- 6) Eine Parallele zur y -Achse geht durch den Punkt $P(3 \mid 1)$. 2P
Wie heißt die Gleichung dieser Geraden?
- 7) Wie heißt die Funktionsgleichung der Geraden, die identisch ist mit der x -Achse? 1P

Lösungen:

1)a) Eine Funktion f ist eine Menge von geordneten Zahlenpaaren (x,y) .

Dabei wird jedem Element $x \in D$ (Definitionsmenge) genau ein Element $y \in Z$ (Zielmenge) zugeordnet. Das zugeordnete Element y wird auch mit $f(x)$ bezeichnet.

b) Gegeben ist eine Funktion f .

Liegt ein Punkt $P(x_p | y_p)$ auf dem Graphen K_f , so erfüllen seine Koordinaten x_p und y_p die Funktionsgleichung $y = f(x)$.

Also gilt:

$$y_p = f(x_p)$$

$$2) y^2 = x^2$$

$$3) D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

4)

$$f(x^2) = 2 * (x^2) + 1$$

$$f(2x) = 2 * (2x) + 1$$

$$f(x+1) = 2 * (x+1) + 1$$

5) Funktionsgleichung, Wertetabelle, Paarmenge, Schaubild

$$6) x = 3$$

$$7) y = 0$$

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

AUFGABEN

1) Gegeben sind die Funktionen f_1, f_2 (Die Definitionsmenge und die Zielmenge ist jeweils \mathbb{R}) mit den Funktionsgleichungen

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{9}{2}$$

$$g(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{9}{2}$$

- | | |
|---|-----|
| a) Zeichnen Sie das Schaubild K_f von f und das Schaubild K_g von g in ein rechtwinkliges Koordinatensystem (x -Achse: $[-2; 6,5]$, y -Achse: $[-6,5; 8]$, $LE = 1 \text{ cm}$) | 6P |
| b) Bestimmen Sie rechnerisch den Schnittpunkt von K_g und der y -Achse. | 4P |
| c) Bestimmen Sie rechnerisch den Schnittpunkt von K_g und der x -Achse. | 6P |
| d) Bestimmen Sie rechnerisch den Scheitel von K_f . | 10P |
| e) Bestimmen Sie rechnerisch den Schnittpunkt von K_f und der y -Achse. | 4P |
| f) Bestimmen Sie rechnerisch den Schnittpunkt von K_f und der x -Achse. | 10P |
| g) Bestimmen Sie rechnerisch den Schnittpunkt der Schaubilder K_f und K_g | 10P |

Bemerkung:

- 1) Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit der Zeichnung.
- 2) Sollten sich Unterschiede zwischen Rechnungen und Zeichnung ergeben, müssen diese erwähnt werden, ansonsten wird dies mit massivem Punkteabzug bewertet.
- 3) Bitte ausführliche, nachvollziehbare Darstellung (siehe Unterricht bzw. Musterlösung). Saubere, exakte Bezeichnungen, keine Syntaxfehler !!!!

Lösung

b) Schnittpunkte $S_{yg}(0 | y_s)$ mit der y-Achse: $S_{yg}(0 | y_s) \in K_g$

$$y_s = -\frac{3}{2} \cdot 0 + \frac{9}{2} = 4,5$$

also:

$$S_{yg}(0 \mid 4,5)$$

c) Schnittpunkte $S_{xg}(x_s | 0)$ mit der x-Achse: $S_{xg}(x_s | 0) \in K_g$

$$-\frac{3}{2}x_s + \frac{9}{2} = 0 \iff x_s = 3$$

also:

$$S_{\text{xg}}(3 \mid 0)$$

d) Scheitel S von K_f

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{9}{2} = -\frac{1}{2}(x^2 - 6x + 9) = -\frac{1}{2}(x^2 - 2 \cdot 3x + 9) = -\frac{1}{2}(x - 3)^2$$

also: $S(3|0)$

e) Schnittpunkte $S_{yf}(0 | y_s)$ mit der y-Achse: $S_{yf}(0 | y_s) \in K_f$

$$y_s = -\frac{1}{2} \cdot 0^2 + 3 \cdot 0 - 4,5 = -4,5$$

also:

$$S_{yf}(0 \mid -4,5)$$

f) Schnittpunkte $S_{xf}(x_s | 0)$ mit der x-Achse: $S_{xf}(x_s | 0) \in K_f$

$$-\frac{1}{2}x_s^2 + 3x_s - \frac{9}{2} = 0 \iff x_s^2 - 6x_s + 9 = 0 \iff (x_s - 3)^2 = 0 \iff x_s = 3$$

also:

$$S_{\text{xf}}(3 \mid 0)$$

g) Schnittpunkte $S(x_s | y_s)$ von K_f und K_g

(oder etwas mathematischer formuliert: $K_f \cap K_g = S(x_s|y_s)$):

$$-\frac{1}{2}x_s^2 + 3x_s - \frac{9}{2} = -\frac{3}{2}x_s + \frac{9}{2} \iff x_s^2 - 6x_s + 9 = 3x_s - 9 \iff x_s^2 - 9x_s + 18 = 0 \iff$$

$$x_{S1} = 3; x_{S2} = 6$$

$$y_{S1} = f(3) = -\frac{1}{2}3^2 + 3 \cdot 3 - \frac{9}{2} = 0; \quad y_{S2} = f(6) = -\frac{1}{2}6^2 + 3 \cdot 6 - \frac{9}{2} = -4,5$$

also: $S_1(3|0)$; $S_2(6|-4,5)$

KLAUSUR 2 Mathematik 2BK11 Nachtermin Zeit: 60 Minuten

Name, Vorname:

Hilfsmittel:
keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

AUFGABEN

1) 10P

Eine Klassenarbeit wird durch einen linearen Punkteschlüssel korrigiert:

Das bedeutet, dass 50 Punkte mit der Note 1 und 0 Punkte mit der Note 6 bewertet werden.

a) Zeichnen Sie ein rechtwinkliges Koordinatensystem, in dem auf der senkrechten Achse die Note y und auf der horizontalen Achse die Anzahl x der erreichten Punkte eingetragen werden.

(x -Achse: $[-1; -11]$, y -Achse: $[-1; -7]$, LE: 5 Punkte = 1 cm, Eine Note = 1 cm).

Verbinden Sie die Punkte $N_1(50, 1)$ und $N_6(0, 6)$ durch die Gerade g .

b) Berechnen Sie die Funktionsgleichung der Geraden g ?

Bem: Das Ergebnis $y = (60 - x) / 10$ muß bei 2c) und 2d) verwendet werden.

c) Welche Note ergeben 28 erreichte Punkte.

Berechnen Sie dies mit Hilfe der Funktionsgleichung der Geradengleichung.

d) Wieviel Punkte bekommt man für die Note 2,4 ?

Berechnen Sie dies mit Hilfe der Funktionsgleichung der Geradengleichung.

2) 12P

a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Parabel, die durch die folgenden Punkte gehen:

$P_1(-3 | -3,5)$, $P_2(1 | -7,5)$, $P_3(-4 | -5)$

b) 8P
Bestimmen Sie außerdem (rechnerisch) den Scheitel dieser Parabel.

Lösungen:

1) b) ZPF mit $N_1((50, 1) \in g, N_6(0, 6) \in g$:

$$\begin{aligned}\frac{y-6}{x-0} &= \frac{1-6}{50-0} \iff \\ \frac{y-6}{x-0} &= \frac{-5}{50} \iff \frac{y-6}{x-0} = -\frac{1}{10} \iff y-6 = -\frac{1}{10} \cdot x \iff \\ y &= 6 - \frac{1}{10} \cdot x\end{aligned}$$

$$\text{c) } y(28) = 6 - \frac{1}{10} \cdot 28 = 6 - 2,8 = 3,2$$

$$\text{d) } y = 6 - \frac{1}{10} \cdot x \iff$$

$$y-6 = -\frac{1}{10} \cdot x \iff x = (y-6) \cdot (-10) \iff x = -10y + 60 \iff$$

$$x = 60 - 10y, \text{ also:}$$

$$x(2,4) = 60 - 10 \cdot 2,4 = 36$$

2)

$$\text{a) } f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$P_1(-3 | -\frac{7}{2}) \in K_f:$$

$$-\frac{7}{2} = a \cdot (-3)^2 + b \cdot (-3) + c$$

$$-\frac{7}{2} = 9a - 3b + c \iff 18a - 6b + 2c = -7 \text{ (G1)}$$

$$P_2(1 | -\frac{15}{2}) \in K_f:$$

$$-\frac{15}{2} = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c$$

$$-\frac{15}{2} = a + b + c \iff 2a + 2b + 2c = -15 \text{ (G2)}$$

$$P_3(-4 | -5) \in K_f:$$

$$-5 = a \cdot (-4)^2 + b \cdot (-4) + c$$

$$-5 = 16a - 4b + c \text{ (G3)}$$

Mit TR (Taschenrechner), Additionsverfahren oder Gausscher Algorithmus folgt aus (G1), (G2), (G3):

$$a = -\frac{1}{2}, \quad b = -2, \quad c = -5$$

Ergebnis:

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x - 5$$

$$\begin{aligned}
f(x) &= -\frac{1}{2}x^2 - 2x - 5 = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2x - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5 = -\frac{1}{2}(x^2 + 2 \cdot 2x + 2 \cdot 5) = -\frac{1}{2}(x^2 + 4x + 10) \\
&= -\frac{1}{2}(x^2 + 4x + 10) = -\frac{1}{2}(x^2 + 4x + 4 - 4 + 10) = -\frac{1}{2}(x^2 + 4x + 4 + 6) = -\frac{1}{2}((x+2)^2 + 6) \\
&= -\frac{1}{2}(x+2)^2 - 3 \implies S(-2 \mid -3)
\end{aligned}$$

Kurztest 3 Mathematik 1 2BK11 Nachtermin Zeit: 10 Minuten

Name, Vorname:

Hilfsmittel:
keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punktabzug !!!!

AUFGABEN

1) Geben Sie die Formeln der folgenden Begriffe an:

- a) Punkt-Steigungs-Form der Geradengleichung 1P
b) Zwei-Punkte- Form der Geradengleichung 1P

2) Geben Sie die Geradengleichung der folgenden Geraden an:

- a) x-Achse 2P
b) y-Achse 2P

3) Eine Normalparabel wird gedehnt ($a = 0,5$). Dann wird sie an der x-Achse gespiegelt. Dann wird sie in x-Richtung um -2 verschoben und in y-Richtung um +3 verschoben. Geben Sie die Funktionsgleichung dieser Parabel an. 3P

4) Eine Ursprungsgerade mit der Steigung 2 wird um +2 in x-Richtung verschoben.

- a) Wie heißt die Gleichung dieser Geraden g 2P
b) Durch den y-Achsenabschnitt dieser Geraden g wird eine dazu senkrechte Gerade h gezeichnet. Wie heißt die Gleichung dieser Geraden h? 2P

5) Wie heißt der Scheitelpunkt der Parabel mit der Funktionsgleichung:

$f(x) = x^2 - 4x + 4$ 4P

6) Gegeben sei die Funktion $f(x) = 2x^2 + 1$ 3P

Bestimmen Sie

$f(x^2)$, $f(2x)$, $f(x+1)$

Lösungen:

$$1a) \frac{y - y_0}{x - x_0} = m$$

$$b) \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

$$2) y = 0$$

$$x = 0$$

$$3)$$

$$y = 0,5 x^2$$

$$y = -0,5 x^2$$

$$y = -0,5 (x - 2)^2$$

$$y = -0,5 (x - 2)^2 + 3 \quad (\text{Endergebnis})$$

$$4a) y = 2x - 4$$

$$b) y = -0,5 x - 4$$

$$5)$$

$$f(x) = x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$$

$$S(2 \mid 0)$$

$$6)$$

$$f(x^2) = 2 * (x^2)^2 + 1$$

$$f(2x) = 2 * (2x)^2 + 1$$

$$f(x+1) = 2 * (x+1)^2 + 1$$

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

keine

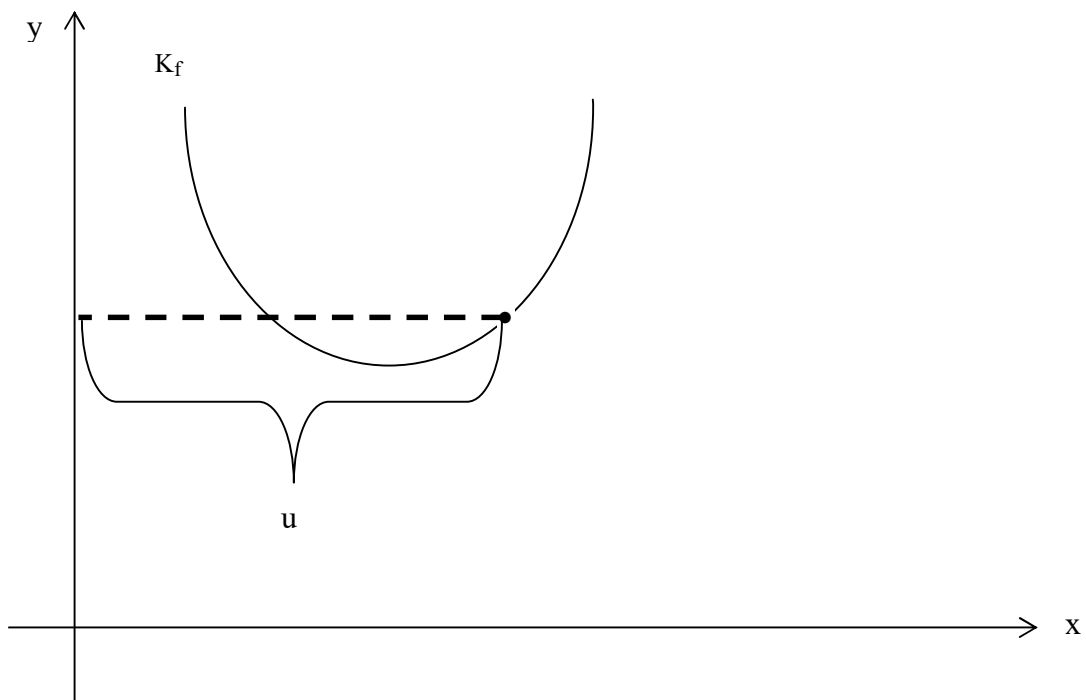
Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punktabzug !!!!

AUFGABEN

1) Gegeben sei eine Funktion h (mit dem Schaubild K_h).

Herr W.B. Gierig will wissen, wie groß $h(u)$ und $h'(u)$ ist. Zeichnen Sie deshalb $h(u)$ und $h'(u)$ in die folgende Zeichnung ein, so dass Herr W.B. Gierig diese Werte mit dem Geodreieck ablesen kann. (4P)



2) Wie ist rein formal (mit Hilfe des Limes) die Ableitung $h'(x)$ definiert ? 2P

3) Gegeben ist die Funktion g mit der Funktionsgleichung 3P

$$g(x) = (\sin(x) + \pi)^2 - \sqrt{x}$$

Berechnen Sie (nur Term angeben, nicht vereinfachen):

$$g(x^2 + \pi)$$

4) Geben Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen an: 7P

(c, k sind **konstante** Werte)

a) $h_1(x) = g(x) + c$

b) $h_2(x) = k \cdot g(x)$

c) $h_3(x) = g(x) + h(x)$

d) $h_4(x) = 10 \cdot 5$

e) $h_5(x) = 3 \cdot x^7 + 10$

f) $h_6(x) = x$

g) $h_7(x) = k/c$

5) In welchen Punkten hat das Schaubild K_g der Funktion g mit der Funktionsgleichung $g(x) = x^3$ 4P

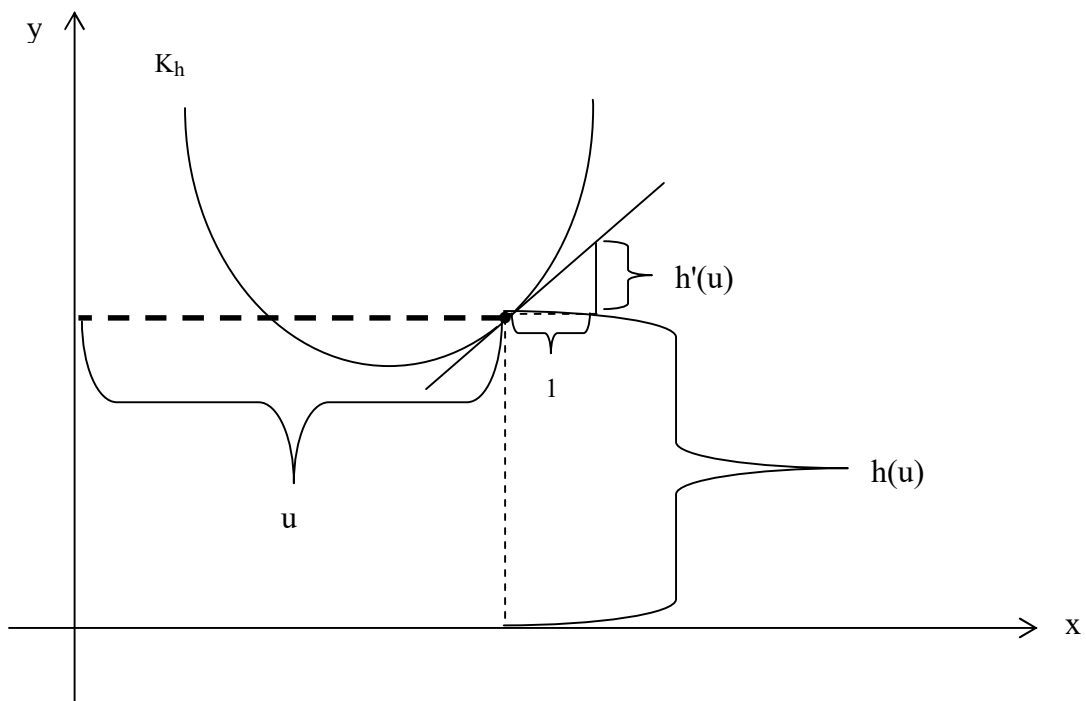
eine negative Steigung.

Zeichnerische und rechnerische Begründung!

:

Lösungen:

1)



$$2) h'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x}$$

$$3) g(x^2 + \pi) = (\sin(x^2 + \pi) + \pi)^2 - \sqrt{x^2 + \pi}$$

4)

a) $h_1'(x) = g'(x)$

b) $h_2'(x) = k \cdot g'(x)$

c) $h_3'(x) = g'(x) + h'(x)$

d) $h_4'(x) = 0$

e) $h_5'(x) = 21 \cdot x^6$

f) $h_6'(x) = 1$

g) $h_7'(x) = 0$

5) a) $g'(x) = 3x^2 \geq 0$, da $x^2 \geq 0$

b) Alle Tangenten haben positive Steigung

Name, Vorname:

Hilfsmittel:
keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

AUFGABEN

1)

Zeichnen Sie das Schaubild der folgenden Funktion, in jeweils dem Bereich, in dem interessanten Punkte (Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Extrempunkte, Wendepunkte) vorkommen. Untersuchen Sie die Schaubilder jeweils bzgl:

- a) Symmetrie
- b) Achsenschnittpunkte
- c) Ableitungen
- d) Extrempunkte
- e) Wendepunkte und Wendetangenten

$$f(x) = \frac{1}{5}x^4 - 5$$

2)

Eine bzgl. $O(0 \mid 0)$ punktsymmetrische Parabel 5. Ordnung hat in $P(-1 \mid 1)$ eine Wendetangente mit der Steigung 3. Wie heißt die Funktionsgleichung der Parabel ?

Lösungen

$$1) f(x) = \frac{1}{5}x^4 - 5$$

a) Symmetrie

$$a1) f(-x) = \frac{1}{5}(-x)^4 - 5 = \frac{1}{5}x^4 - 5 = f(x)$$

Das Schaubild K_f ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

$$a2) -f(-x) = -\left(\frac{1}{5}(-x)^4 - 5\right) = -\frac{1}{5}x^4 + 5 \neq f(x)$$

Das Schaubild K_f ist nicht punktsymmetrisch bzgl. $O(0 | 0)$.

b) Achsenschnittpunkte

b1) Schnittpunkte $S_y(0 | y_s)$ mit der y-Achse: $S_y(0 | y_s) \in K_f$

$$y_s = f(0) = \frac{1}{5} \cdot 0^4 - 5 = -5$$

$S_y(0 | -5)$

b2) Schnittpunkte $S_x(x_s | 0)$ mit der x-Achse: $S_x(x_s | 0) \in K_f$

$$0 = \frac{1}{5}x_s^4 - 5 \quad | \cdot 5$$

$$0 = x_s^4 - 25 \iff x_s^4 = 25$$

$$x_{s1} = \sqrt[4]{25} = \sqrt{5}$$

$$x_{s2} = -\sqrt[4]{25} = -\sqrt{5}$$

damit Nullstellen von f:

$$S_{x1}(-\sqrt{5} | 0) \approx S_{x1}(-2,24 | 0)$$

$$S_{x2}(\sqrt{5} | 0) \approx S_{x2}(2,24 | 0)$$

c) Ableitungen

$$f(x) = \frac{1}{5}x^4 - 5$$

$$f'(x) = \frac{4}{5}x^3$$

$$f''(x) = \frac{12}{5}x^2$$

$$f'''(x) = \frac{24}{5}x$$

d) Extrempunkte

Extrempunkte $E(x_e | y_e)$: $f'(x_e) = 0$

$$0 = \frac{4}{5}x_e^3 \quad | : \frac{4}{5}$$

$$x_e^3 = 0$$

$$x_{e1} = 0$$

$$f''(0) = \frac{12}{5} \cdot 0^2 = 0 \implies \text{keine Aussage möglich.}$$

aber: VZW bei $f'(0)$ von - nach + \implies Tiefpunkt

$$y_{e1} = f(0) = \frac{1}{5} \cdot 0^4 - 5 = -5$$

damit:

T(0 | -5) Tiefpunkt

e) Wendepunkte

Wendepunkte $W(x_w|y_w)$: $f''(x_w) = 0$

$$\frac{12}{5}x_w^2 = 0 \quad | : \frac{12}{5}$$

$$x_w^2 = 0$$

$$x_w = 0$$

$$f'''(0) = \frac{24}{5} \cdot 0 = 0 \implies \text{keine Aussage möglich.}$$

aber: kein VZW bei $f''(0) \implies$ kein Wendepunkt

damit:

keine Wendepunkte

f) Wendetangenten

Da es keine Wendepunkte gibt, gibt es auch keine Wendetangenten.

2)

$$f(x) = ax^5 + bx^3 + cx$$

$$f'(x) = 5ax^4 + 3bx^2 + c$$

$$f''(x) = 20ax^3 + 6bx$$

a) $P(-1 | 1) \in K_f$

$$1 = a \cdot (-1)^5 + b \cdot (-1)^3 + c \cdot (-1)$$

$$1 = -a - b - c \quad (G1)$$

b) $P(-1 | 1)$ ist Wendepunkt

$$f''(-1) = 0$$

$$20a \cdot (-1)^3 + 6b(-1) = 0$$

$$-20a - 6b = 0$$

$$-10a - 3b = 0 \quad (G2)$$

c) Wendetangente in $P(-1 | 1)$ hat die Steigung 3

$$f'(-1) = 3$$

$$5a \cdot (-1)^4 + 3b \cdot (-1)^2 + c = 3$$

$$5a + 3b + c = 3 \quad (G3)$$

d) Mit TR (Taschenrechner), Additionsverfahren oder Gausscher Algorithmus folgt aus (G1), (G2) und (G3):

$$a = -\frac{3}{2}, \quad b = 5, \quad c = -\frac{9}{2}$$

e) Ergebnis:

$$f(x) = -\frac{3}{2}x^5 + 5x^3 - \frac{9}{2}x$$

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

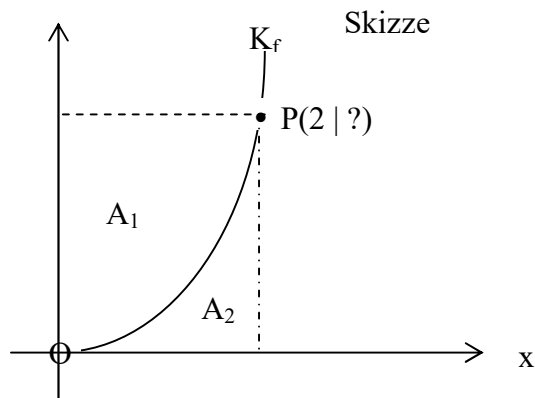
keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

AUFGABEN

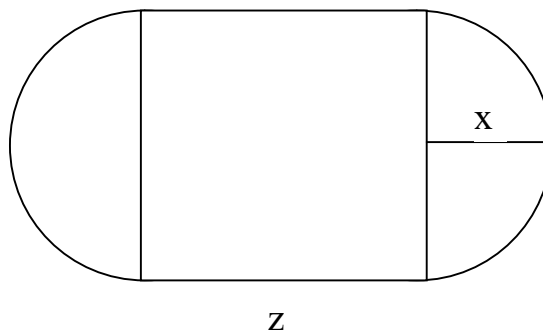
1)

 K_f ist das Schaubild der Funktion mit der Funktionsgleichung $f(x) = x^2$

Die Fläche A_1 wird durch K_f , die y-Achse und die waagrechte Gerade, die durch P geht, begrenzt. Die Fläche A_2 wird durch K_f , die x-Achse und die senkrechte Gerade, die durch P geht, begrenzt.

- a) Begründen Sie anschaulich, warum $A_1 > A_2$ ist.
- b) Um das wie vielfache ist A_1 größer als A_2 ?
- c) Um das wie vielfache ist A_1 größer als A_2 , wenn $P(a | ?) \in K_f$ ein beliebiger Punkt ist ($a > 0$) ?

2)



Eine 400 m Laufbahn besteht aus 2 parallelen Strecken mit zwei angesetzten Halbkreisen. Für welchen Radius x der Halbkreise wird die rechteckige Spielfläche maximal ?

Lösungen

1)

a) Sei A_R die Fläche des Rechtecks, dessen Diagonale durch O und P geht und dadurch in 2 Dreiecke geteilt wird. Da K_f unterhalb der Gerade (OP) liegt, gilt: $A_1 > A_R/2 > A_2$

Damit gilt dann:

$$A_1 > A_2$$

b)

$$A_2 = \int_0^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{8}{3}$$

$$A_1 = 2 \cdot f(2) - A_2 = 2 \cdot 2^2 - \frac{8}{3} = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{16/3}{8/3} = 2$$

andere Möglichkeit (Berechnung A_1):

$$A_1 = \int_0^2 (\text{Oberkurve} - \text{Unterkurve}) dx =$$

$$\int_0^2 (f(2) - x^2) dx = \int_0^2 (4 - x^2) dx =$$

$$= \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = 8 - \frac{2^3}{3} = \frac{16}{3}$$

c)

$$A_2 = \int_0^a x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^a = \frac{a^3}{3}$$

$$A_1 = a \cdot f(a) - A_2 = a \cdot a^2 - \frac{a^3}{3} = a^3 - \frac{a^3}{3} = \frac{2}{3} a^3$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\frac{2}{3} a^3}{\frac{1}{3} a^3} = 2$$

andere Möglichkeit (Berechnung A_1):

$$A_1 = \int_0^a (\text{Oberkurve} - \text{Unterkurve}) dx =$$

$$\int_0^a (f(a) - x^2) dx = \int_0^a (a^2 - x^2) dx =$$

$$= \left[a^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^a = a^3 - \frac{a^3}{3} = \frac{2}{3} a^3$$

2)

Zielfunktion:

$$A(x, z) = 2x \cdot z$$

Nebenbedingung:

$$400 = 2z + 2\pi x$$

$$200 = z + \pi x$$

$$z = 200 - \pi x$$

Reduktion auf 1 Variable:

$$A(x) = 2x (200 - \pi x) = 400x - 2\pi x^2$$

Ableitungen:

$$A'(x) = 400 - 4\pi x$$

$$A''(x) = -4\pi$$

Definitionsbereich:

$$D = \left[0; \frac{200}{\pi} \right]$$

Lokale Extremwerte $E(x_e | A_e)$:

$$A'(x_e) = 0:$$

$$0 = 400 - 4\pi x_e$$

$$x_e = 100/\pi \approx 31,83$$

$$x_e \in D$$

$$A\left(\frac{100}{\pi}\right) = 400 \cdot \frac{100}{\pi} - 2\pi \frac{10000}{\pi^2} = \frac{20000}{\pi} \approx 6366,2$$

Randwertuntersuchung:

$$A(0) = 0$$

$$A\left(\frac{200}{\pi}\right) = 2 \cdot \frac{200}{\pi} \left(200 - \pi \frac{200}{\pi}\right) = 0$$

Ergebnis:

Die maximale Fläche wird für $x = 100/\pi$ mit $A_e \approx 6366,2$ erreicht.

Kurztest 5 Mathematik 1 2BKI1 23.4.2008 Zeit: 15 Minuten

Name, Vorname:

Hilfsmittel:
keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

Bemerkung:

Taschenrechner dürfen nicht verwendet werden!!!

AUFGABEN

1) Lösen Sie die Gleichung $r^x = s$ (wobei $r > 0$, $r \neq 1$, $s > 0$) auf nach:

- a) x 1P
b) r 1P

2) Berechnen Sie:

- a) $\ln e^7$ 1P
b) $\ln 1$ 1P
c) $\ln e$ 1P

3) Formen Sie in möglichst einfache Terme um (falls dies nicht möglich ist, schreiben sie "keine Umformung möglich"):

- a) $\log_{10}(a \cdot a)$ 2P
b) $\ln(x - y)$ 2P
c) $\ln\left(\frac{1}{e^2}\right)$ 2P
d) $\log_a 1$ 1P
e) $\log_a a$ 1P
f) $\log_a a^x$ 2P
g) $\log_a ((a^n)^m)$ 3P
h) $\log_a \frac{a^n}{a^m}$ 3P

Lösungen:

1)

a) $x = \log_r s$

b) $r = \sqrt[x]{s} = s^{1/x}$

2)

a) $\ln e^7 = 7$

b) $\ln 1 = 0$

c) $\ln e = 1$

3)

a) $\log_{10}(a \cdot a) = \log_{10} a^2 = 2 \log_{10} a$

b) $\ln(x - y)$ "keine Umformung möglich"

c) $\ln\left(\frac{1}{e^2}\right) = \ln(e^{-2}) = -2 \ln e = -2$

d) $\log_a 1 = 0$

e) $\log_a a = 1$

f) $\log_a a^x = x$

g) $\log_a ((a^n)^m) = \log_a (a^{nm}) = nm \cdot \log_a a = nm$

h) $\log_a \frac{a^n}{a^m} = \log_a a^{n-m} = (n-m) \log_a a = n-m$

Name, Vorname:

Hilfsmittel:
keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

AUFGABEN

1)

Berechnen Sie die Fläche, welche die folgenden Kurven einschliessen:

$$f(x) = x^3 \quad , \quad h(x) = 2x - x^2$$

Bemerkungen

Ergebnisse bitte genau angeben!

Stammfunktion berechnen.

Taschenrechner zum Überprüfen der Ergebnisse benutzen.

2)

Ein Bankkunde will in 5 Jahren bei 4,5 % Jahreszinssatz 2500 Euro verdienen.

Wieviel Geld muß er einlegen ?

3) Von einer radioaktiven Substanz sind nach einer Stunde noch 400 mg, nach 2 Stunden noch 300 mg vorhanden. Wie lautet das Zerfallsgesetz ?

4)

Für welche Winkel x zwischen -2π und 3π gilt:

$$\sin x = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

Bemerkung:

Ergebnisse bitte im Gradmass angeben.

Lösungen

1)

a)

Schnittpunkte $S(x_s | y_s)$ von K_f und K_h

$$x_s^3 = 2x_s - x_s^2$$

$$x_s^3 + x_s^2 - 2x_s = 0 \iff x_s(x_s^2 + x_s - 2) = 0 \iff$$

$$\text{Fall1: } x_s^2 + x_s - 2 = 0$$

$$\text{Fall2: } x_s = 0$$

$$x_{s3} = 0$$

$$x_{s1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

$$x_{s1} = -2$$

$$x_{s2} = 1$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-2}^0 ((x^3 - (2x - x^2))) dx = \int_{-2}^0 (x^3 - 2x + x^2) dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 \right]_{-2}^0 \\ &= \left[\frac{0^4}{4} + \frac{0^3}{3} - 0^2 \right] - \left[\frac{(-2)^4}{4} + \frac{(-2)^3}{3} - (-2)^2 \right] = \\ &= - \left[4 - \frac{8}{3} - 4 \right] = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^1 (x^3 - (2x - x^2)) dx = \int_0^1 (x^3 - 2x + x^2) dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 \right]_0^1 \\ &= \left[\frac{1^4}{4} + \frac{1^3}{3} - 1^2 \right] - \left[\frac{0^4}{4} + \frac{0^3}{3} - 0^2 \right] = -\frac{5}{12} \\ A &= |I_1| + |I_2| = \left| \frac{8}{3} \right| + \left| -\frac{5}{12} \right| = \frac{37}{12} \end{aligned}$$

2)

gegeben: $p = 4,5 \implies q = 1,045$; $n = 5$;

gesucht: K_0 ; K_5

Es gilt:

$$K_5 = K_0 + 2500$$

$$K_5 = K_0 \cdot 1,05^n$$

also:

$$K_0 + 2500 = K_0 \cdot 1,05^n$$

$$K_0 \cdot 1,05^n - K_0 = 2500$$

$$K_0(1,05^n - 1) = 2500$$

$$K_0 = \frac{2500}{(1,05^n - 1)}$$

$$K_0 \approx 10155,09$$

Ergebnis:

Das eingelegte Kapital muss 10155,09 Euro betragen.

3)

1. Lösung

Für das Wachstumsgesetz gilt:

gegeben:

$$m(t) = m_0 \cdot q^t \quad (t \text{ in Stunden, } m \text{ in mg})$$

gesucht:

q und m_0

Nach 1 h sind noch 400 mg vorhanden, also:

$$m(1) = 400 \quad \text{und}$$

$$m(1) = m_0 \cdot q^1$$

damit:

$$400 = m_0 \cdot q^1 \quad \text{bzw. vereinfacht:}$$

$$(G1) \quad 400 = m_0 \cdot q$$

Nach 2 h sind noch 300 mg vorhanden, also:

$$m(2) = 300 \quad \text{und}$$

$$m(2) = m_0 \cdot q^2$$

damit:

$$(G2) \quad 300 = m_0 \cdot q^2$$

Man hat also 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten. Jeweils auflösen nach m_0 :

$$m_0 = \frac{400}{q}$$

$$m_0 = \frac{300}{q^2}$$

gleichsetzen ergibt:

$$\frac{400}{q} = \frac{300}{q^2} \quad | \cdot q^2$$

$$400 q = 300$$

ergibt:

$$q = 3/4 \quad \text{und}$$

$$m_0 = \frac{400}{q} = \frac{400}{0,75} = \frac{1600}{3}$$

Damit:

$$m(t) = \frac{1600}{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^t$$

4)

$$x_1 = -60^\circ, \quad x_2 = -180^\circ + 60^\circ = -120^\circ, \quad x_3 = 180^\circ + 60^\circ = 240^\circ, \quad x_4 = 360^\circ - 60^\circ = 300^\circ$$