

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

AUFGABEN

1) Wie sind die Begriffe Aussage, Aussageform, Gleichung definiert ?

2) Welche der folgenden sprachlichen Gebilde sind mathematisch sinnlos, welche sind Aussagen (wahr bzw. falsch) und welches sind Aussageformen (allgemeingültig, nicht allgemeingültig) ? Die Variablen (Kleinbuchstaben) müssen durch reellen Zahlen ersetzt werden (außer bei Teilbarkeit: dort müssen die ganzen Zahlen verwendet werden).

Großbuchstaben wie A, B, C, usw. bedeuten Aussagen.

Bemerkung: Bei nicht allgemeingültigen Aussageformen muss eine Begründung angegeben werden.

Sprachliches Gebilde	Eigenschaft
Außerhalb von Raum und Zeit.	
Alle ungeraden Zahlen sind Primzahlen	
$\neg x \vee x$	
$x - 6 < 10$	
$x = 7 \rightarrow x = 10$	
$(x > 5 \vee x < 5) \wedge x = 5$	
$x = y \leftrightarrow y = x$	
$y^2 = 16 \rightarrow y = 4$	
$(y > 0) \rightarrow (y^2 = 16 \rightarrow y = 4)$	
z ist eine Primzahl \vee z ist gerade	
$(\neg(A \vee B)) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$ (Wahrheitstafel machen)	
$(\neg(x \geq 20 \vee x \leq 10)) \rightarrow (x < 20 \wedge x > 10)$	
$x \leq 18 \vee x \geq 12$	
$z^2 + z = 0 \leftrightarrow (z = -1 \wedge z = 0)$	

3) "BKl1" ist die Menge aller Schüler dieser Klasse. "BKl1A" ist die Menge aller Schüler der Gruppe A dieser Klasse.
 "BKl1B" ist die Menge aller Schüler der Gruppe B dieser Klasse. "MESK" ist die Menge aller Schüler dieser Schule.

a) Bestimmen Sie:

$$\text{"BKl1A"} \cup \text{"BKl1B"} =$$

$$\text{"BKl1A"} \cap \text{"BKl1B"} =$$

$$\text{"BKl1A"} \setminus \text{"BKl1B"} =$$

$$\text{"BKl1B"} \setminus \text{"BKl1A"} =$$

$$\text{"BKl1"} \setminus \text{"BKl1B"} =$$

$$\text{"BKl1"} \setminus \text{"BKl1A"} =$$

$$\text{"BKl1A"} \setminus \text{"BKl1"} =$$

$$\text{"BKl1B"} \setminus \text{"BKl1"} =$$

$$\text{"MESK"} \cap \text{"BKl1A"} =$$

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x < 2 \wedge x > 2\} =$$

b) Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch ?

$$\text{"MESK"} \subset \text{"BKl1"}$$

$$\text{"BKl1A"} \subset \text{"BKl1"}$$

$$(\text{"BKl1A"} \cup \text{"BKl1B"}) \subset \text{"BKl1"}$$

4)

$$\text{a) gegeben: } A = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leq x < 2\}, B = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leq 9\}$$

gesucht:

$$A \cap B =$$

$$A \cup B =$$

$$\text{b) gegeben: } A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 0\}, B = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 0\}$$

gesucht:

$$A \cap B =$$

$$A \cup B =$$

$$\text{c) gegeben: } A = \{x \in \mathbb{R} \mid -6 \leq x \leq 1\}, B = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x < 0\}$$

gesucht:

$$A \cap B =$$

$$A \cup B =$$

Reserveaufgaben für das nächste Mal:

gegeben: $A = \{3; 5; 6\}$, $B = \{4; 5; 6\}$, $C = \{2; 3; 6; 7\}$

gesucht:

$$A \cap C$$

$$B \setminus C$$

$$(A \cap B) \setminus C$$

$$(B \cup C) \cap (A \cup B)$$

$$(A \setminus B) \cap C$$

$$(B \cap C) \setminus A$$

Lösungen:

1)

a) Ein sprachliches Gebilde heißt **Aussage**, wenn es entweder wahr (w) oder falsch (f) ist.

b) Ein sprachliches Gebilde heißt **Aussageform**, wenn es Variable (Leerstellen, Platzhalter) enthält und durch Einsetzung in eine Aussage übergeht. In Abhängigkeit von den Variablen schreibt man auch $A(x)$ bzw. $A(x,y)$, bzw. $A(x,y,z)$ usw.

c) Werden zwei Terme durch ein Gleichheitszeichen miteinander verbunden, so entsteht eine Gleichung.

2) Welche der folgenden sprachlichen Gebilde sind mathematisch sinnlos, welche sind Aussagen (wahr bzw. falsch) und welches sind Aussageformen (allgemeingültig, nicht allgemeingültig) ? Die Variablen (Kleinbuchstaben) müssen durch reellen Zahlen ersetzt werden (außer bei Teilbarkeit: dort müssen die ganzen Zahlen verwendet werden). Großbuchstaben wie A, B, C, usw. bedeuten Aussagen.

Sprachliches Gebilde	Eigenschaft
Außerhalb von Raum und Zeit.	mathematisch sinnlos
Alle ungeraden Zahlen sind Primzahlen	falsch
$\neg x \vee x$	mathematisch sinnlos
$x - 6 < 10$	n.a.: $x = 0$
$x = 7 \rightarrow x = 10$	n.a.: $x = 7$
$(x > 5 \vee x < 5) \wedge x = 5$	n.a.: $x = 12$
$x = y \leftrightarrow y = x$	allgemeingültig
$y^2 = 16 \rightarrow y = 4$	n.a.: $y = -4$
$(y > 0) \rightarrow (y^2 = 16 \rightarrow y = 4)$	allgemeingültig
z ist eine Primzahl $\vee z$ ist gerade	n.a.: $z = 15$
$\neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$ (Wahrheitstafel machen)	allgemeingültig
$\neg(x \geq 20 \vee x \leq 10) \rightarrow (x < 20 \wedge x > 10)$	allgemeingültig
$x \leq 18 \vee x \geq 12$	allgemeingültig
$z^2 + z = 0 \leftrightarrow z = -1 \wedge z = 0$	n.a.: $z = 0$

Wahrheitstabelle für $\neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

A	B	$\neg(A \vee B)$	$\neg A \wedge \neg B$	$\neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$
w	w	f	f	w
w	f	f	f	w
f	w	f	f	w
f	f	w	w	w

Bem:

Welche Gemeinsamkeit besteht bei dieser Wahrheitstafel zur Digitaltechnik ?

3) "BK11" ist die Menge aller Schüler dieser Klasse. "BK11A" ist die Menge aller Schüler der Gruppe A dieser Klasse.
 "BK11B" ist die Menge aller Schüler der Gruppe B dieser Klasse. "MESK" ist die Menge aller Schüler dieser Schule.

a) Bestimmen Sie:

$$\text{"BK11A"} \cup \text{"BK11B"} = \text{"BK11"}$$

$$\text{"BK11A"} \cap \text{"BK11B"} = \emptyset$$

$$\text{"BK11A"} \setminus \text{"BK11B"} = \text{"BK11A"}$$

$$\text{"BK11B"} \setminus \text{"BK11A"} = \text{"BK11B"}$$

$$\text{"BK11"} \setminus \text{"BK11B"} = \text{"BK11A"}$$

$$\text{"BK11"} \setminus \text{"BK11A"} = \text{"BK11B"}$$

$$\text{"BK11A"} \setminus \text{"BK11"} = \emptyset$$

$$\text{"BK11B"} \setminus \text{"BK11"} = \emptyset$$

$$\text{"MESK"} \cap \text{"BK11A"} = \text{"BK11A"}$$

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x < 2 \wedge x > 2\} = \emptyset$$

b) Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch ?

$$\text{"MESK"} \subset \text{"BK11"} \quad \text{falsch}$$

$$\text{"BK11A"} \subset \text{"BK11"} \quad \text{wahr}$$

$$(\text{"BK11A"} \cup \text{"BK11B"}) \subset \text{"BK11"} \quad \text{wahr}$$

4)

a) gegeben: $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leq x < -2\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leq 9\}$

$$A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 2\}$$

$$A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leq x \leq 9\}$$

b) gegeben: $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 0\}$

gesucht:

$$A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 0\}$$

$$A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leq 0\}$$

c) gegeben: $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -6 \leq x \leq 1\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x < 0\}$

gesucht:

$$A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x < 0\}$$

$$A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \mid -6 \leq x \leq 1\}$$

*Name, Vorname:*Hilfsmittel:
keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

AUFGABEN

1) Die Grundmenge $G = \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Definitionsmenge und die Lösungsmenge der folgenden Gleichung:

$$\frac{x+5}{x-5} + \frac{x-5}{x+5} - 2 = \frac{100}{x^2 - 25}$$

2)

Bemerkungen zu folgenden Aufgaben:

b1) Wenn die Lösungsmenge aus unendlich vielen Elementen besteht, muß zusätzlich noch ein konkretes Element der Lösungsmenge angegeben werden. Bei der Auswahl eines konkreten Elements dürfen nicht alle frei wählbaren Parameter Null gesetzt werden. Für dieses Element muß die Probe gemacht werden !

b2) Wenn die Lösungsmenge aus einem Element besteht, muß ebenfalls die Probe gemacht werden.

Berechnen (oder direkt ablesen) Sie die Lösungsmenge folgender linearer Gleichungssysteme mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus.

a)

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 5 & 9 \end{array}$$

d)

$$\begin{array}{cccccc} 2 & 1 & 9 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 6 & 1 & 0 & 5 \\ 7 & 0 & 5 & 0 & 1 & 2 \end{array}$$

3)

gegeben:

Geraden K_{f1} und K_{f2} mit den zugehörigen Funktionsgleichungen

$$f_1(x) = \frac{3}{4}x + 2$$

$$f_2(x) = \frac{2}{5}x - 2$$

gesucht: (zeichnerische und **exakte** rechnerische Lösung !)Der Schnittpunkt S von K_{f1} und K_{f2} Zeichnen Sie die Geraden K_{f1} und K_{f2} in ein rechtwinkliges Koordinatensystem

Lösungen:

1)

$$\frac{x+5}{x-5} + \frac{x-5}{x+5} - 2 = \frac{100}{x^2-25}$$

$$D = R \setminus \{5; -5\}$$

$$\frac{x+5}{x-5} + \frac{x-5}{x+5} - 2 = \frac{100}{(x-5)(x+5)} \quad | \cdot (x-5)(x+5)$$

$$(x+5)^2 + (x-5)^2 - 2(x-5)(x+5) = 100$$

$$x^2 + 10x + 25 + x^2 - 10x + 25 - 2x^2 + 50 = 100$$

$$2x^2 - 2x^2 + 100 = 100$$

$$2x^2 - 2x^2 = 0$$

$$L = R \setminus \{5; -5\}$$

2)

a) $L = \{\}$

b) $L = \{(9; 8; 7)\}$

Probe:

$$1 \cdot 9 + 0 \cdot 8 + 0 \cdot 7 = 9$$

$$0 \cdot 9 + 1 \cdot 8 + 0 \cdot 7 = 8$$

$$0 \cdot 9 + 0 \cdot 8 + 1 \cdot 7 = 7$$

c)

$$x_1 = 7 - 4 \cdot x_3$$

$$x_2 = 9 - 5 \cdot x_3$$

$$L = \{(x_1; x_2; x_3) \mid x_1 = 7 - 4 \cdot x_3 \wedge x_2 = 9 - 5 \cdot x_3 \wedge x_3 \in \mathbb{R}\}$$

wähle: $x_3 = 1$, dann gilt:

$$x_1 = 7 - 4 \cdot 1 = 3$$

$$x_2 = 9 - 5 \cdot 1 = 4$$

$$\text{also: } (3; 4; 1) \in L$$

Probe:

$$1 \cdot 3 + 0 \cdot 4 + 4 \cdot 1 = 7$$

$$0 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 5 \cdot 1 = 9$$

d)

$$x_2 = 4 - 9 \cdot x_3 - 2 \cdot x_1$$

$$x_4 = 5 - 6 \cdot x_3 - 4 \cdot x_1$$

$$x_5 = 2 - 5 \cdot x_3 - 7 \cdot x_1$$

$$L = \{(x_1; x_2; x_3; x_4; x_5) \mid x_2 = 4 - 9 \cdot x_3 - 2 \cdot x_1 \wedge x_4 = 5 - 6 \cdot x_3 - 4 \cdot x_1 \wedge x_5 = 2 - 5 \cdot x_3 - 7 \cdot x_1 \wedge x_1 \in \mathbb{R} \wedge x_3 \in \mathbb{R}\}$$

wähle: $x_1 = 1; x_3 = 1$, dann gilt:

$$x_2 = 4 - 9 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = -7$$

$$x_4 = 5 - 6 \cdot 1 - 4 \cdot 1 = -5$$

$$x_5 = 2 - 5 \cdot 1 - 7 \cdot 1 = -10$$

$$\text{also: } (1; -7; 1; -5; -10) \in L$$

Probe:

$$2 \cdot 1 + 1 \cdot (-7) + 9 \cdot 1 + 0 \cdot (-5) + 0 \cdot (-10) = 4$$

$$4 \cdot 1 + 0 \cdot (-7) + 6 \cdot 1 + 1 \cdot (-5) + 0 \cdot (-10) = 5$$

$$7 \cdot 1 + 0 \cdot (-7) + 5 \cdot 1 + 0 \cdot (-5) + 1 \cdot (-10) = 2$$

3)

$$f_1(x) = \frac{3}{4}x + 2$$

$$f_2(x) = \frac{2}{5}x - 2$$

Der Schnittpunkt sei $S(x_s|y_s)$. Für diesen gilt:

$S(x_s|y_s) \in K_{f1}$ und $S(x_s|y_s) \in K_{f2}$. Damit ist die Punktprobe erfüllt:

$$y_s = \frac{3}{4}x_s + 2$$

$$y_s = \frac{2}{5}x_s - 2$$

also:

$$\frac{3}{4}x_s + 2 = \frac{2}{5}x_s - 2 \iff$$

$$15x_s + 40 = 8x_s - 40 \iff 7x_s = -80 \iff x_s = -\frac{80}{7} = -11\frac{3}{7}$$

$$y_s = \frac{3}{4} \cdot -\frac{80}{7} + 2 = -\frac{60+14}{7} = -\frac{46}{7} = -6\frac{4}{7}$$

und damit:

$$x_s = -\frac{80}{7}$$

$$y_s = -\frac{46}{7}$$

also:

$$S\left(-\frac{80}{7} \mid -\frac{46}{7}\right)$$

Alternative Aufgabe:

3)

gegeben:

Geraden K_{f1} und K_{f2} mit den zugehörigen Funktionsgleichungen

$$f_1(x) = -\frac{3}{4}x + 2$$

$$f_2(x) = \frac{2}{5}x - 2$$

gesucht: (zeichnerische und rechnerische Lösung !)

Der Schnittpunkt S von K_{f1} und K_{f2}

Zeichnen Sie die Geraden K_{f1} und K_{f2} in ein rechtwinkliges Koordinatensystem
(x-Achse: [-1; 4], y-Achse: [-4 ; 4] , LE =1 cm)

Lösung:

3)

$$f_1(x) = -\frac{3}{4}x + 2$$

$$f_2(x) = \frac{2}{5}x - 2$$

Der Schnittpunkt sei $S(x_s|y_s)$. Für diesen gilt:

$S(x_s|y_s) \in K_{f1}$ und $S(x_s|y_s) \in K_{f2}$. Damit ist die Punktprobe erfüllt:

$$y_s = -\frac{3}{4}x_s + 2$$

$$y_s = \frac{2}{5}x_s - 2$$

also:

$$-\frac{3}{4}x_s + 2 = \frac{2}{5}x_s - 2 \iff \frac{2}{5}x_s + \frac{3}{4}x_s = 4 \iff$$

$$8x_s + 15x_s = 80 \iff 23x_s = 80 \iff x_s = \frac{80}{23}$$

$$y_s = -\frac{3}{4} \cdot \frac{80}{23} + 2 = -\frac{60}{23} + 2 = -\frac{14}{23}$$

und damit:

$$x_s = \frac{80}{23}$$

$$y_s = -\frac{14}{23}$$

also:

$$S\left(\frac{80}{23} \mid -\frac{14}{23}\right)$$

Name, Vorname:

Hilfsmittel:
keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

AUFGABEN

Bemerkung:

Machen Sie, falls möglich, jeweils die zeichnerische und rechnerische Probe.

1) 15P

a) K_g ist eine Gerade mit $P_1(-5 \mid -1) \in K_g$ und $P_2(2 \mid -3,8) \in K_g$
Geben Sie (berechnen !) Sie die Funktionsgleichung g dieser Geraden.

b) Gegeben ist die Funktionen f_1 (Die Definitionsmenge und die Zielmenge ist jeweils \mathbb{R}) mit der Funktionsgleichung: 5P

$$f_1(x) = -\frac{2}{5}x - 3$$

Zeichnen Sie das Schaubild K_{f_1} von f_1 in ein rechtwinkliges Koordinatensystem

c) Die Parallele K_{f_2} zu K_{f_1} geht durch den Punkt $P_1(3 \mid 0,8)$. 15P

Zeichnen Sie diese Parallele in das obige Koordinatensystem ein.
Berechnen Sie die Funktionsgleichung von K_{f_2} ?

d) Die Senkrechte K_{f_3} auf K_{f_1} geht durch den Punkt $P_2(-3 \mid -4,5)$. 15P

Zeichnen Sie diese Senkrechte in das obige Koordinatensystem ein.
Bestimmen Sie rechnerisch die Funktionsgleichung der Senkrechten K_{f_3}

Lösungen:

1)

a)

15P

ZPF:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y - (-1)}{x - (-5)} = \frac{-3,8 - (-1)}{2 - (-5)} \iff \frac{y+1}{x+5} = \frac{-2,8}{7} \iff \frac{y+1}{x+5} = -0,4 \iff \frac{y+1}{x+5} = -0,4 \iff$$

$$y+1 = -0,4(x+5) \iff y+1 = -0,4x - 2 \iff y = -0,4x - 3$$

also:

$$g(x) = -0,4x - 3$$

Probe:

$$a1) P_1(-5 \mid -1) \in K_g \iff -1 = -0,4 \cdot (-5) - 3 \iff -1 = 2 - 3 \iff -1 = -1 \text{ (wahr)}$$

$$a2) P_2(2 \mid -3,8) \in K_g \iff -3,8 = -0,4 \cdot 2 - 3 \iff -3,8 = -0,8 - 3 \iff -3,8 = -3,8 \text{ (wahr)}$$

Bem: weitere Probe durch Vergleich mit der Zeichnung

b) Zeichnung

5P

c)

15P

K_{f2} hat die gleiche Steigung wie K_{f1} , also $-\frac{2}{5}$.

Nach der PSF gilt allgemein:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$$

$$\frac{y - 0,8}{x - 3} = -\frac{2}{5} \iff y - 0,8 = -\frac{2}{5}(x - 3) \iff y - 0,8 = -\frac{2}{5}x + \frac{6}{5} \iff$$

$$y = -\frac{2}{5}x + 2$$

also:

$$f_2(x) = -\frac{2}{5}x + 2$$

Probe:

$$P_1(3 \mid 0,8) \in K_{f2} \iff 0,8 = -\frac{2}{5} \cdot 3 + 2 \iff 0,8 = -\frac{6}{5} + 2 \iff 0,8 = 0,8 \text{ (wahr)}$$

Bem: weitere Probe durch Vergleich mit der Zeichnung

d)

15P

K_{f3} hat die Steigung m . Für diese Steigung gilt:

$$m_s = \frac{-1}{\frac{-5}{2}} = \frac{5}{2}.$$

Nach der PSF gilt allgemein:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m_s$$

$$\frac{y - (-4,5)}{x - (-3)} = \frac{5}{2} \iff \frac{y + 4,5}{x + 3} = \frac{5}{2} \iff y + 4,5 = \frac{5}{2}(x + 3) \iff$$

$$y + 4,5 = \frac{5}{2}x + \frac{15}{2} \iff y = \frac{5}{2}x + 3$$

also:

$$f_3(x) = \frac{5}{2}x + 3$$

Probe:

$$P_2(-3 \mid -4,5) \in K_{f3} \iff -4,5 = \frac{5}{2} \cdot (-3) + 3 \iff -4,5 = \frac{-15}{2} + 3 \iff -4,5 = -4,5 \text{ (wahr)}$$

Bem: weitere Probe durch Vergleich mit der Zeichnung

KLAUSUR 3 Mathematik 1 2BKI1 Nachtermin Zeit: 60 Minuten

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

AUFGABEN

1)

a) Geben Sie konkret eine Funktionsgleichung einer Parabel an, die durch die obigen zwei Punkte $P_1(1 \mid -3)$, $P_2(3 \mid 5)$ geht.

b) Geben Sie alle Funktionsgleichungen derjenigen Parabeln an, die durch die zwei Punkte $P_1(1 \mid -3)$, $P_2(3 \mid 5)$ gehen.

Name, Vorname:

Hilfsmittel:
keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

AUFGABEN

Bemerkungen:

- a) Unter "rechnerische Lösung" wird das im Unterricht verwendete Schema (nicht probieren) verstanden.
- b) Machen Sie, falls möglich, jeweils eine Probe.

1)

Gegeben ist die Funktion f mit der Funktionsgleichung:

$$f(x) = -\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{7}{2}$$

a) Bestimmen Sie rechnerisch den Scheitel der Kurve K_f

b) Zeichnen Sie K_f im Intervall $[-8; 6]$

c) Bestimmen Sie rechnerisch die Gleichung der Tangente im Punkt $Q(0 \mid ?) \in K_f$

d) Gegeben ist die Gerade h mit der zugehörigen Funktionsgleichung:

$$h(x) = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{2}$$

Bestimmen Sie rechnerisch den Berührungspunkt der Parallelen zur Geraden h an die Kurve K_f

e) Bestimmen Sie rechnerisch die x -Koordinaten aller Punkte der Kurve K_f , die die Steigung $-\frac{5}{4}$ haben.

f) Bestimmen Sie rechnerisch die Berührungspunkte der Tangenten von $P(-2 \mid -1)$ an K_f

Lösungen:

a)

$$f'(x) = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$$

Für den Scheitel $S(x_s | y_s)$ gilt:

$$0 = f'(x_s) = -\frac{1}{4}x_s - \frac{1}{2}$$

$$0 = -\frac{1}{4}x_s - \frac{1}{2}$$

also:

$$x_s = -2$$

$$y_s = f(2) = -\frac{1}{8} \cdot (-2)^2 - \frac{1}{2} \cdot (-2) - \frac{7}{2} = -3$$

damit:

$$S(-2 | -3)$$

c)

Berechnung der y-Koordinaten von Q

$$f(0) = -\frac{1}{8} \cdot 0^2 - \frac{1}{2} \cdot 0 - \frac{7}{2} = -3,5, \text{ also } Q(0 | -3,5)$$

Berechnung der Tangentensteigung

$$\text{Steigung der Tangente t: } f'(0) = -\frac{1}{4} \cdot 0 - \frac{1}{2} = -0,5$$

Berechnung der Funktionsgleichung der Tangenten

Nach der PSF gilt für t:

$$\frac{y - (-3,5)}{x - 0} = -\frac{1}{2} \iff y = -\frac{1}{2}x - 3,5, \text{ also:}$$

$$\text{t: } y = -\frac{1}{2}x - 3,5$$

d)

$$f'(x) = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$$

Der gesuchte Berührungspunkt sei $B(x_B | y_B)$.

Dort ist die Steigung -0,75

also gilt:

$$-\frac{3}{4} = f'(x_B) = -\frac{1}{4}x_B - \frac{1}{2}$$

also gilt;

$$-\frac{3}{4} = -\frac{1}{4}x_B - \frac{1}{2}$$

damit:

$$x_B = 1$$

$$y_B = f(1) = f(x) = -\frac{1}{8} \cdot 1^2 - \frac{1}{2} \cdot 1 - \frac{7}{2} = -\frac{33}{8} = -4\frac{1}{8}$$

also:

$$B(1 | -\frac{33}{8})$$

e)

Der gesuchte Punkt sei $P(x_u | y_u)$.

a) Berechnung der x-Koordinate des Punkts:

Er hat die Steigung 2. Also gilt:

$$-\frac{5}{4} = f'(x_u) = -\frac{1}{4}x_u - \frac{1}{2}$$

$$-\frac{5}{4} = -\frac{1}{4}x_u - \frac{1}{2}$$

$$x_u = 3$$

f)

Tangentenbedingung, kurz TB

Der gesuchte Berührungspunkt sei $B(x_B, y_B)$.

Die ZPF der Geradengleichung ergibt die sogenannte Tangentenbedingung:

$$\frac{y_B - (-1)}{x_B - (-2)} = f'(x_B) \quad (\text{TB})$$

Es gilt aber:

$$y_B = -\frac{1}{8}x_B^2 - \frac{1}{2}x_B - \frac{7}{2} \quad \text{und} \quad f'(x_B) = -\frac{1}{4}x_B - \frac{1}{2}$$

Setze dies in (TB) ein. Das ergibt dann:

$$\frac{-\frac{1}{8}x_B^2 - \frac{1}{2}x_B - \frac{7}{2} + 1}{x_B + 2} = -\frac{1}{4}x_B - \frac{1}{2} \iff -\frac{1}{8}x_B^2 - \frac{1}{2}x_B - 2,5 = \left(-\frac{1}{4}x_B - \frac{1}{2}\right)(x_B + 2) \iff$$

$$-\frac{1}{8}x_B^2 - \frac{1}{2}x_B - 2,5 = -\frac{1}{4}x_B^2 - \frac{1}{2}x_B - \frac{1}{2}x_B - 1 \quad | \cdot 8 \iff$$

$$-x_B^2 - 4x_B - 20 = -2x_B^2 - 4x_B - 4x_B - 8 \iff$$

$$x_B^2 + 4x_B - 12 = 0$$

also:

$$x_{B1} = -6, \quad y_{B1} = f(-6) = -\frac{1}{8} \cdot (-6)^2 - \frac{1}{2} \cdot (-6) - \frac{7}{2} = -5$$

$$x_{B2} = 2, \quad y_{B2} = f(2) = -\frac{1}{8} \cdot 2^2 - \frac{1}{2} \cdot 2 - \frac{7}{2} = -5$$

damit:

$$B_1(-6 | -5)$$

$$B_2(2 | -5)$$

Name, Vorname:

Hilfsmittel:
keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

AUFGABEN

Bemerkungen:

- a) Unter "rechnerische Lösung" wird das im Unterricht verwendete Schema (nicht probieren) verstanden.
- b) Machen Sie, falls möglich, jeweils eine Probe.

1)

Gegeben ist die Funktion f mit der Funktionsgleichung:

$$f(x) = -x^3 - 2x^2 + 1$$

Zeichnen Sie das Schaubild der Funktion f , in jeweils dem Bereich, in dem interessanten Punkte (Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Extrempunkte, Wendepunkte) vorkommen. Untersuchen Sie die Schaubilder jeweils bzgl:

- a) Achsenschnittpunkte
- b) Ableitungen
- c) Extrempunkte
- d) Wendepunkte

2)

Eine Parabel 4. Ordnung hat in $O(0 \mid 0)$ eine waagrechte Tangente und in $P(-2 \mid 2)$ einen Wendepunkt mit waagrechter Tangente.

Geben Sie die Funktionsgleichung der Parabel an.

Lösungen:

1)

a) Achsenschnittpunkte

a1) Schnittpunkte $S_y(0 | y_s)$ mit der y-Achse: $S_y(0 | y_s) \in K_f$

$$y_s = f(0) = -0^3 - 2 \cdot 0^2 + 1 = 1$$

$S_y(0 | 1)$

a2) Schnittpunkte $S_x(x_s | 0)$ mit der x-Achse: $S_x(x_s | 0) \in K_f$

$$0 = -x_s^3 - 2x_s^2 + 1$$

Nullstelle $x_s = -1$ durch Probieren. Also gilt:

$$0 = -x_s^3 - 2x_s^2 + 1 = (x_s + 1) \cdot R$$

Bestimmen von $R(x)$ durch Polynomdivision:

$$(-x_s^3 - 2x_s^2 + 1) : (x_s + 1) = -x_s^2 - x_s + 1$$

$$\begin{array}{r} -x_s^3 - x_s^2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -x_s^2 + 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -x_s^2 - x_s \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x_s + 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x_s + 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0 \end{array}$$

Lösungen bestimmen von $0 = (-x_s^2 - x_s + 1) \cdot (x_s + 1)$

$$\text{Fall1: } -x_s^2 - x_s + 1 = 0$$

$$x_{s1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 1}}{2 \cdot (-1)} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{-2}$$

$$x_{s1} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \approx -1,62$$

$$x_{s2} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \approx 0,62$$

damit Nullstellen von f:

$$S_{x1}(-1 | 0), S_{x2}\left(\frac{-1 - \sqrt{5}}{2} | 0\right) \approx S_{x2}(-1,62 | 0), S_{x3}\left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} | 0\right) \approx S_{x2}(0,62 | 0)$$

b) Ableitungen:

$$f(x) = -x^3 - 2x^2 + 1$$

$$f'(x) = -3x^2 - 4x$$

$$f''(x) = -6x - 4$$

$$f'''(x) = -6$$

c) Extrempunkte

Extrempunkte $E(x_e|y_e)$: $f'(x_e) = 0$

$$0 = -3x_e^2 - 4x_e$$

$$0 = x_e \cdot (-3x_e - 4)$$

Fall1: $x_e = 0$:

$$x_{e1} = 0$$

Fall2: $-3x_e - 4 = 0$

$$x_{e2} = -\frac{4}{3}$$

$$f''(0) = -6 \cdot 0 - 4 = -4 < 0 \implies \text{Hochpunkt}$$

$$f''(-\frac{4}{3}) = -6 \cdot (-\frac{4}{3}) - 4 = 4 > 0 \implies \text{Tiefpunkt}$$

$$y_{e1} = f(0) = -0^3 - 2 \cdot 0^2 + 1 = 1$$

$$y_{e2} = f(-\frac{4}{3}) = -(-\frac{4}{3})^3 - 2 \cdot (-\frac{4}{3})^2 + 1 = -\frac{5}{27}$$

damit:

$H(0 | 1)$ Hochpunkt, $T(-\frac{4}{3} | -\frac{5}{27}) \approx T(-1,33 | -0,19)$ Tiefpunkt

d) Wendepunkte

Wendepunkte $W(x_w|y_w)$: $f''(x_w) = 0$

$$-6x_w - 4 = 0 \iff x_w = -\frac{2}{3}$$

$$f'''(-\frac{2}{3}) = -6 \neq 0 \implies \text{Wendepunkt}$$

$$y_w = f(-\frac{2}{3}) = -(-\frac{2}{3})^3 - 2 \cdot (-\frac{2}{3})^2 + 1 = \frac{11}{27}$$

damit:

$W(-\frac{2}{3} | \frac{11}{27}) \approx W(-0,67 | 0,41)$ Wendepunkt

2)

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

$$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$$

$$f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$$

a) $O(0 | 0) \in K_f$

$$0 = a \cdot 0^4 + b \cdot 0^3 + c \cdot 0^2 + d \cdot 0 + e$$

$$e = 0$$

b) $e = 0$ eingesetzt in $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ ergibt:

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx$$

c) $O(0 | 0)$ hat eine waagrechte Tangente

$$f'(0) = 0$$

$$4a \cdot 0^3 + 3b \cdot 0^2 + 2c \cdot 0 + d = 0$$

$$d = 0$$

d) $d = 0$ eingesetzt in $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx$ ergibt:

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2$$

e) $P(-2 | 2) \in K_f$

$$2 = a \cdot (-2)^4 + b \cdot (-2)^3 + c \cdot (-2)^2$$

$$2 = 16a - 8b + 4c$$

$$1 = 8a - 4b + 2c \quad (G1)$$

f) $P(-2 | 2)$ ist Wendepunkt, also $f''(-2) = 0$

$$12a \cdot (-2)^2 + 6b \cdot (-2) + 2c = 0$$

$$48a - 12b + 2c = 0$$

$$24a - 6b + c = 0 \quad (G2)$$

g) $P(-2 | 2)$ hat eine waagrechte Tangente

$$f'(-2) = 0$$

$$4a \cdot (-2)^3 + 3b \cdot (-2)^2 + 2c \cdot (-2) = 0$$

$$-32a + 12b - 4c = 0$$

$$-8a + 3b - c = 0 \quad (G3)$$

h) Mit TR (Taschenrechner), Additionsverfahren oder Gaußscher Algorithmus folgt aus (G1), (G2) und (G3):

$$a = \frac{3}{8}, \quad b = 2, \quad c = 3$$

i) Ergebnis:

$$f(x) = \frac{3}{8}x^4 + 2x^3 + 3x^2$$

Name, Vorname:

Hilfsmittel:
Taschenrechner

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

AUFGABEN

Bemerkungen:

a) Unter "rechnerische Lösung" wird das im Unterricht verwendete Schema (nicht probieren) verstanden.

b) Machen Sie, falls möglich, jeweils eine Probe.

Falls das Ergebnis falsch ist und keine Probe gemacht wurde, gibt es Punkteabzug !

1) Bei der Bank A kann man sein Kapital 10 Jahre zu 5 % Jahreszins anlegen.

Bei der Bank B kann man sein Kapital 5 Jahre zu 10 % Jahreszins anlegen.

Wieviel Jahre müsste man bei Bank B das Kapital anlegen, (bei immer noch 10 % Jahreszins), um das gleiche Endkapital wie bei Bank A (zu den o.g. Bedingungen von Bank A) zu bekommen ?

2) Der Spannungsverlauf beim Entladen eines Kondensators beträgt in Abhängigkeit der Zeit:

$$U = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}; \quad \text{wobei } U_0 \neq 0, R \neq 0, C \neq 0$$

Formen Sie diese Gleichung korrekt nach t um.

3) Welche Parabel der Form $p(x) = ax - x^2$ ($a > 0$) schließt mit der x -Achse eine Fläche von 4 Flächeninhalten ein?

4) Eine bzgl. $O(0 | 0)$ punktsymmetrische Parabel 5. Ordnung hat in $P(-1 | 1)$ eine Wendetangente mit der Steigung 3. Wie heißt die Funktionsgleichung der Parabel ?

Lösungen:

1)

$$K_n^B = K_0 \cdot 1,1^n$$

$$K_5^A = K_0 \cdot 1,05^{10}$$

$$K_n^B = K_5^A$$

$$K_0 \cdot 1,1^n = K_0 \cdot 1,05^{10} \quad |: K_0 \neq 0$$

$$1,1^n = 1,05^{10}$$

$$n = \log_{1,1} 1,05^{10} = 10 \cdot \log_{1,1} 1,05 = 10 \cdot \frac{\ln 1,05}{\ln 1,1} \approx 5,12$$

2)

$$U(t) = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \quad |: U_0$$

$$e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{U}{U_0}$$

$$-\frac{t}{RC} = \log_e \frac{U}{U_0} = \ln \frac{U}{U_0}$$

$$t = -RC \cdot \ln \frac{U}{U_0}$$

3)

a) Schnittpunkte mit der x-Achse

Schnittpunkte $S_x(x_s | 0)$ mit der x-Achse: $S_x(x_s | 0) \in K_p$

$$ax_s - x_s^2 = 0 \iff x_s(a - x_s) = 0$$

Fall1: $a - x_s = 0$

$$x_s = a$$

$$x_{s1} = a$$

Fall2: $x_s = 0$

$$x_{s2} = 0$$

b) Berechnung der Fläche

$$\int_0^a (ax - x^2) dx = 4$$

$$\left[\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^a = 4 \iff \frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3} - \left(\frac{0^3}{2} - \frac{0^3}{3} \right) = 4 \iff \frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3} = 4 \iff \frac{a^3}{3} = 4 \iff$$

$$a = \sqrt[3]{24} \approx 2,85$$

4)

$$f(x) = ax^5 + bx^3 + cx$$

$$f'(x) = 5ax^4 + 3bx^2 + c$$

$$f''(x) = 20ax^3 + 6bx$$

a) $P(-1 | 1) \in K_f$

$$1 = a \cdot (-1)^5 + b \cdot (-1)^3 + c \cdot (-1)$$

$$1 = -a - b - c \quad (G1)$$

b) $P(-1 | 1)$ ist Wendepunkt

$$f''(0) = 0$$

$$20a \cdot (-1)^3 + 6b(-1) = 0$$

$$-20a - 6b = 0$$

$$-10a - 3b = 0 \quad (G2)$$

c) Wendetangente in $P(-1 | 1)$ hat die Steigung 3

$$f'(-1) = 3$$

$$5a \cdot (-1)^4 + 3b \cdot (-1)^2 + c = 3$$

$$5a + 3b + c = 3 \quad (G3)$$

d) Mit TR (Taschenrechner), Additionsverfahren oder Gausscher Algorithmus folgt aus (G1), (G2) und (G3):

$$a = -\frac{3}{2}, \quad b = 5, \quad c = -\frac{9}{2}$$

e) Ergebnis:

$$f(x) = -\frac{3}{2}x^5 + 5x^3 - \frac{9}{2}x$$

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

Formelsammlung, Taschenrechner

Hinweise (unbedingt beachten):

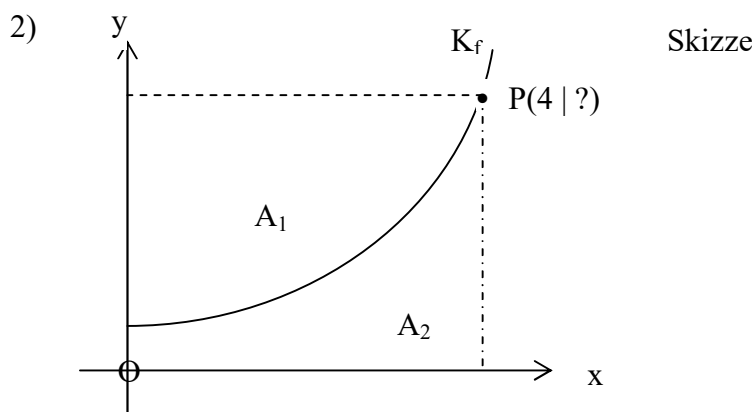
- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

AUFGABEN

1) Geben Sie eine konkrete Funktionsgleichung einer Funktion f und konkrete Werte a und b an, so daß gilt:

Die bilanzierte Fläche zwischen der x -Achse und der Kurve K_f und den Begrenzungsgeraden $x = a$ und $x = b$ ist 0.

Die tatsächliche Fläche zwischen der x -Achse und der Kurve K_f und den Begrenzungsgeraden $x = a$ und $x = b$ ist ungleich 0.



K_f ist das Schaubild der Funktion mit der Funktionsgleichung $f(x) = f(x) = \frac{x^2}{4} + 1$

Die Fläche A_1 wird durch K_f , die y -Achse und die waagrechte Gerade, die durch P geht, begrenzt. Die Fläche A_2 wird durch K_f , die x -Achse und die senkrechte Gerade, die durch P geht, begrenzt.

a) Welche Fläche ist größer A_1 oder A_2 ? Begründen Sie mathematisch !

b) Für welchen Punkt $P(a | ?) \in K_f$ mit $a > 0$ gilt:

$$A_1 = A_2$$

3) Gegeben ist die folgende Funktion:

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d; \quad a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}, d \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

Bestätigen oder widerlegen Sie die folgende Vermutung:

"Der x -Wert des Wendepunkts ist das arithmetische Mittel (Mittelwert) der x -Werte der Extrempunkte"

Lösungen

1)

$$\int_{-2}^2 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_{-2}^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{(-2)^4}{4} = 0$$

$$I_1 = \int_{-2}^0 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_{-2}^0 = \frac{0^4}{4} - \frac{(-2)^4}{4} = -4$$

$$I_2 = \int_0^2 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{0^4}{4} = 4$$

Also:

$$A = |I_1| + |I_2| = |-4| + |4| = 8$$

2)

a) Sei A_R die Fläche des Rechtecks, dessen Diagonale durch O und P geht und dadurch in 2 Dreiecke geteilt wird. Da K_f unterhalb der Gerade (OP) liegt, gilt: $A_1 > A_R/2 > A_2$

Damit gilt dann:

$$A_1 > A_2$$

b)

$$A_2 = \int_0^2 \left(\frac{x^2}{4} + 1 \right) dx = \left[\frac{x^3}{12} + x \right]_0^2 = \frac{28}{3}$$

$$A_1 = 4 \cdot f(4) - A_2 = 4 \cdot 5 - \frac{28}{3} = \frac{32}{3}$$

also: $A_2 > A_1$

andere Möglichkeit (Berechnung A_1):

$$A_1 = \int_0^2 (\text{Oberkurve} - \text{Unterkurve}) dx =$$

$$\int_0^2 \left(f(4) - \left(\frac{x^2}{4} + 1 \right) \right) dx =$$

$$\int_0^2 \left(5 - \frac{x^2}{4} - 1 \right) dx = \int_0^2 \left(4 - \frac{x^2}{4} \right) dx =$$

$$= \left[4x - \frac{x^3}{12} \right]_0^2 = 16 - \frac{16}{3} = \frac{32}{3}$$

andere Möglichkeit (Berechnung A_1):

$$A_1 = \int_0^a (\text{Oberkurve} - \text{Unterkurve}) dx =$$

$$\int_0^2 \left(f(a) - \left(\frac{x^2}{4} + 1 \right) \right) dx =$$

$$\int_0^2 \left(\frac{a^2}{4} + 1 - \frac{x^2}{4} - 1 \right) dx = \int_0^2 \left(\frac{a^2}{4} - \frac{x^2}{4} \right) dx =$$

$$= \left[\frac{a^2}{4} x - \frac{x^3}{12} \right]_0^2 = \frac{a^3}{4} - \frac{a^3}{12} = \frac{a^3}{6}$$

$$A_2 = \int_0^a \left(\frac{x^2}{4} + 1 \right) dx = \left[\frac{x^3}{12} + x \right]_0^a = \frac{a^3}{12} + a$$

$$A_1 = a \cdot f(a) - A_2 = a \cdot \left(\frac{a^2}{4} + 1 \right) = \frac{a^3}{4} + a - \left(\frac{a^3}{12} + a \right) = \frac{a^3}{6}$$

$$A_1 = A_2$$

$$\frac{a^3}{12} + a = \frac{a^3}{6} \quad | \cdot 12$$

$$a^3 + 12a = 2a^3 \iff a^3 - 12a = 0 \iff a(a^2 - 12) = 0 \quad | :a \neq 0$$

$$a^2 = 12 \iff$$

$$a_1 = -\sqrt{12} \quad (\text{keine Lösung, da laut Aufgabenstellung } a > 0)$$

$$a_2 = \sqrt{12}$$

3)

gegeben: $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x$

gesucht:

gilt: $x_W = \frac{x_{e1} + x_{e2}}{2}$?

a) Ableitungen

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x$$

$$f'(x) = -x^2 + 4x - 3$$

$$f''(x) = -2x + 4$$

$$f'''(x) = -2$$

b) Extrempunkte

Extrempunkte $E(x_e|y_e)$: $f'(x_e) = 0$

$$0 = -x_e^2 + 4x_e - 3$$

$$x_{e1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-3)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-4 \pm 2}{-2} = 2 \pm 1$$

$$x_{e1} = 1$$

$$x_{e2} = 3$$

$$f''(1) = -2 \cdot 1 + 4 = 2 > 0 \implies \text{Tiefpunkt}$$

$$f''(3) = -2 \cdot 3 + 4 = -2 < 0 \implies \text{Hochpunkt}$$

T(1 | ?) Tiefpunkt, H(3 | ?) Hochpunkt

c) Wendepunkte

Wendepunkte $W(x_w|y_w)$: $f''(x_w) = 0$

$$-2x_w + 4 = 0$$

$$x_w = 2$$

$$f'''(2) = -2 \neq 0 \implies \text{Wendepunkt}$$

$$y_w = -\frac{1}{3} \cdot 2^3 + 2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 = -\frac{2}{3}$$

damit:

$$W(2 | -\frac{2}{3}) \approx W(2 | -0,67) \text{ Wendepunkt}$$

d)

$$\frac{x_{e1} + x_{e2}}{2} = \frac{1 + 3}{2} = 2 = x_w$$

Damit wurde die Vermutung für diesen Fall bestätigt !

Name, Vorname:

Hilfsmittel:
keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

AUFGABEN

1) Vereinfachen Sie folgende Terme:

a) $\log_2 32$

b) $\log_\pi \pi^6$

c) $\sqrt[3]{5^{24}}$

d) $\log_a ((a^3)^9)$

e) $7^{\log_7 14}$

f) $\ln(2x^2) - \ln(x) - \ln 2$

2) Lösen Sie durch Äquivalenzumformungen nach x auf:

Wenn Ergebnisse ganze Zahlen sind, diese Ergebnisse konkret angeben.

Falls es keine ganze Zahlen sind, die Ergebnisse so aufschreiben, dass sie mit dem Taschenrechner leicht auszurechnen sind (Stichwort: $\ln ..$)

a) $3^x = 81$

b) $x^{10} = 1024$; $x > 0$

c) $e = \pi^x$; e ist die Eulersche Zahl

d) $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{27}{8}$

e) $80 = 2^{3x}$

f) $222 = 4^x \cdot 5^x$

g) $\frac{x^9}{x^{3,5}} = 123$

3) Für welche $q > 0$ ist die folgende Funktion monoton fallend ?

$f(x) = q^x$

Lösungen:

1)

a) $\log_2 32 = 5$

b) $\log_\pi \pi^6 = 6 \cdot \log_\pi \pi = 6$

c) $\sqrt[3]{5^{24}} = 5^{24/3} = 5^8$

d) $\log_a((a^3)^9) = \log_a(a^{3 \cdot 9}) = \log_a(a^{27}) = 27$

e) $7^{\log_7 14} = 14$

f) $\ln(2x^2) - \ln(x) - \ln 2 = \ln(2) + \ln(x^2) - \ln(x) - \ln(2) = 2 \ln(x) - \ln(x) = \ln(x)$

2)

a) $3^x = 81 \iff x = \log_3 81 \iff x = 4$

b) $x^{10} = 1024 \iff x = \sqrt[10]{1024} \iff x = 10$

c) $e = \pi^x \iff x = \log_\pi e \iff x = \frac{\ln e}{\ln \pi} \iff x = \frac{1}{\ln \pi}$

d) $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{27}{8} \iff x = \log_{2/3} \frac{27}{8} \iff x = -3$

e) 1. Lösung:

$$80 = 2^{3x} \iff 80 = (2^3)^x \iff 80 = 8^x \iff x = \log_8 80 \iff x = \frac{\ln 80}{\ln 8}$$

2. Lösung:

$$\begin{aligned} 80 = 2^{3x} &\iff 3x = \log_2 80 \iff x = \frac{\log_2 80}{3} \iff x = \frac{\frac{\ln 80}{\ln 2}}{3} \iff x = \frac{\ln 80}{3 \ln 2} \\ x = \frac{\ln 80}{3 \ln 2} &\iff x = \frac{\ln 80}{\ln 2^3} \end{aligned}$$

f) $222 = 4^x \cdot 5^x \iff 222 = (4 \cdot 5)^x \iff 222 = 20^x \iff x = \log_{20} 222 \iff x = \frac{\ln 222}{\ln 20}$

g) $\frac{x^9}{x^{3,5}} = 123 \iff x^{9-3,5} = 123 \iff x^{5,5} = 123 \iff x = \sqrt[5,5]{123}$

3)

$$0 < q < 1$$