

Name, Vorname:

Hilfsmittel:
keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

AUFGABEN

Bemerkung: Für jede richtig gelöste Teilaufgabe gibt es 3 Punkte !

1) A und B seien Mengen. Geben Sie die exakte Definition mit Hilfe der beschreibenden Form von:

$A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$

2) A und B seien Mengen. Welche der folgenden Aussagen sind immer wahr, welche nicht ? Wenn eine Aussage falsch ist, muß ein konkretes Beispiel und eine Begründung, mit konkreten Mengen A und B angegeben werden. Wenn die Aussage wahr ist, muß dies nicht gemacht werden.

- a) $A \cap B \subset A \setminus B$
- b) $A \cap B \subset A \cup B$
- c) $A \cup B \subset A \cap B$
- d) $A \setminus B \subset A \cap B$

3) a) Geben Sie ein Beispiel für eine Umformung einer Gleichung, die keine Äquivalenzumformung ist.

b) Warum ist diese Umformung keine Äquivalenzumformung (Begründung anhand der Definition !)

c) Warum ist das "Multiplizieren jeder Seite mit 0" keine Äquivalenzumformung ? (Begründung anhand der Definition !)

Beantworten Sie die Frage anhand eines Beispiels.

d) Warum ist die folgende Umformung keine Äquivalenzumformung ?
 $x^2 = 16 \longleftrightarrow x = 4$ (Begründung anhand der Definition !)

4) a) Wie ist der Begriff Gleichung definiert.

b) Geben Sie ein Beispiel einer Gleichung.

5) a) Geben Sie ein Beispiel einer allgemeingültigen Gleichung (mit Grundmenge $G =$ reelle Zahlen).

b) Warum ist diese Gleichung allgemeingültig ? (Begründung anhand der Definition !)

c) Geben Sie ein Beispiel einer Gleichung (mit Grundmenge $G =$ reelle Zahlen), die nicht allgemeingültig ist.

d) Warum ist diese Gleichung nicht allgemeingültig ? (Begründung anhand der Definition !)

Lösungen:

1)

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

2)

a) $A \cap B \subset A \setminus B$ falsch

Beispiel: $A = \{1; 2\}$, $B = \{2; 3\}$, also: $A \cap B = \{2\}$ und $A \setminus B = \{1\}$

Es gilt $2 \in A \cap B$, aber $2 \notin A \setminus B$, aber

b) $A \cap B \subset A \cup B$ wahr

Begründung:

wenn $x \in A \cap B$, dann ist $x \in A \wedge x \in B$. Also ist auch $x \in A \vee x \in B$.

Damit ist $x \in A \cup B$

c) $A \cup B \subset A \cap B$ falsch

Beispiel: $A = \{1; 2\}$, $B = \{2; 3\}$, also: $A \cup B = \{1; 2; 3\}$ und $A \cap B = \{2\}$

Es gilt $1 \in A \cup B$, aber $1 \notin A \cap B$

d) $A \setminus B \subset A \cap B$

Beispiel: $A = \{1; 2\}$, $B = \{2; 3\}$, also: $A \setminus B = \{1\}$ und $A \cap B = \{2\}$

Es gilt $1 \in A \setminus B$, aber $1 \notin A \cap B$

3)

a) $x^2 = 16 \longleftrightarrow x = 4$

b) LLG = Lösungsmenge Linke Gleichung = $\{4; -4\}$

LRG = Lösungsmenge Rechte Gleichung = $\{4\}$

LLS \neq LRS

c) $x = 9 \longleftrightarrow x \cdot 0 = 3 \cdot 0$

LLG = $\{9\}$

LRG = \mathbb{R} = Menge der reellen Zahlen.

LLG \neq LRS

d) siehe a)

4) a) Gleichungen sind entweder Aussagen oder Aussageformen, die mit Hilfe der Gleichheitsrelation = gebildet werden.

b) $x + 1 = 12$

5) a) $x + x = 2x$

b) Weil für jede Einsetzung von x (aus der Definitionsmenge) die Aussage wahr wird.

c) $x + 1 = 0$

d) Nicht für jede Einsetzung von x (aus der Definitionsmenge), z.B. für $x = 3$, wird die Aussage wahr wird.

KLAUSUR 1 Mathematik 2BK11 Nachtermin Zeit: 90 Minuten

Name, Vorname:

Hilfsmittel:
keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

AUFGABEN

1) Welche 3 Möglichkeiten gibt es, eine Menge darzustellen ? Geben Sie je ein Beispiel.

2) Was versteht man unter der Differenzmenge $C \setminus D$?

3) Geben Sie für A und B konkrete Mengen an, so dass gilt:

- a) $A \cap B = A$
- b) $A \cap B = A \cup B$
- d) $A \setminus B = A \cup B$

4) Geben Sie ein Beispiel einer Gleichung, die nicht allgemeingültig ist und für keine Ersetzung von x eine wahre Aussage ergibt

5) Geben Sie ein Beispiel einer Gleichung, die

- a) als Lösungsmenge eine Menge besitzt, die nur aus genau einem Element besteht.
- b) die leere Menge als Lösungsmenge hat,
- c) die Menge der reellen Zahlen als Lösungsmenge hat,

6) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 5\}$; $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 5\}$

Dabei ist \mathbb{R} die Menge der reellen Zahlen.

Welche folgenden Gebilde sind sinnlos, wahr, falsch ? (ohne Begründung).

a) $A \vee B$ b) $3 \in B$ c) $3 \cup 5$ d) $2 \in 20$ e) $A \in B$ f) $B \subset A$ g) $7,6 \notin A$ h) $\{4\} \subset A$

7) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 5\}$; $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 5\}$. Bestimmen Sie:

a) $A \cup B$ b) $A \cap B$ c) $A \setminus B$ d) $B \setminus A$

8) Vereinfachen Sie die folgenden Terme:

a)
$$\frac{ax^2 - ay^2}{ax - ay}$$

b)
$$\frac{-b + a}{b - a}$$

Lösungen:

1) aufzählende Form, beschreibende Form, Venn-Diagramme.

$$2) C \setminus D = \{x \mid x \in C \wedge x \notin D\}$$

3) $3 = 6$ ist eine Aussage; $x + x = 3x$ ist eine Aussageform;
 $2x + 4 = 10x \Leftrightarrow 4 = 8x$ ist eine Äquivalenzumformung

$$4) L \subset D \subset G$$

5)

a) sinnlos b) falsch c) sinnlos d) sinnlos e) falsch f) falsch g) wahr h) wahr

6)

a) \mathbb{R} b) $\{5\}$ c) $A \setminus \{5\}$ oder auch $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 5\}$ d) $B \setminus \{5\}$ oder auch $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 5\}$

7) Vereinfachen Sie die folgenden Terme:

$$a) = a(x^2 - y^2)/(x + y) = a(x - y)(x + y)/(x + y) = a(x - y)$$

$$b) -1$$

$$8) D = \mathbb{R}$$

$$\frac{7x}{10} - \frac{2}{5} = \frac{x}{2} \quad | \cdot 10$$

$$7x - 4 = 5x$$

$$2x = 4$$

$$x = 2$$

$$L = \{2\}$$

$$10) D = \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{x}{x-1} = 1 \quad | \cdot x(x-1)$$

$$x - 1 + x^2 = x(x - 1)$$

$$x - 1 + x^2 = x^2 - x$$

$$2x = 1$$

$$x = 0,5$$

$$L = \{0,5\}$$

$$9) D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$$

$$\frac{1}{x-3} - 2 = \frac{1}{2(x-3)} \quad | \cdot 2(x-3)$$

$$2 - 4(x-3) = 1$$

$$2 - 4x + 12 = 1$$

$$4x = 13$$

$$x = 13/4$$

$$L = \{13/4\}$$

$$11) D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$$

$$\frac{2x+4}{x+2} = \frac{6(x+2)}{3x+6} \quad | \cdot 3(x+2)$$

$$3(2x+4) = 6(x+2)$$

$$6x + 12 = 6x + 12$$

$$6x = 6x$$

$$L = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$$

Fragen für nächstes Mal:

4) Gilt folgende Behauptung ?

$$(A \setminus B) \cup B = A$$

Begründen Sie an einem Beispiel.

Name, Vorname:

Hilfsmittel:
keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

Bemerkungen zu folgenden Aufgaben:

1) Wenn die Lösungsmenge aus unendlich vielen Elementen besteht, muß zusätzlich noch ein konkretes Element der Lösungsmenge angegeben werden. Bei der Auswahl eines konkreten Elements dürfen nicht alle frei wählbaren Parameter Null gesetzt werden.
Für dieses Element muß die Probe gemacht werden !

2) Wenn die Lösungsmenge aus einem Element besteht, muß ebenfalls die Probe gemacht werden.

AUFGABEN

Berechnen (oder direkt ablesen) Sie die Lösungsmenge folgender linearer Gleichungssysteme mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus.

1) $\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{array}$	2) $\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 6 \end{array}$	3) $\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 7 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & 6 & 11 \end{array}$	4) $\begin{array}{cccccc} 1 & 3 & 5 & 0 & 7 & 9 \\ 0 & 4 & 6 & 1 & 8 & 2 \end{array}$
--	--	---	--

5) $\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & -1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & -1 \end{array}$	6) $\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}$
---	--

Lösungen:

1)

setze:

$$x_3 = s,$$

also:

$$x_1 = 8 - 2s$$

$$x_2 = 5 - 3s$$

$$x_3 = s$$

also:

$$L = \{(8-2s; 5-3s; s) \mid s \in \mathbb{R}\}$$

Ein Element der Lösungsmenge angeben

1) wähle dazu z.B: $s = 1$:

$$\text{also: } (6; 2; 1) \in L$$

2) Probe machen:

$$1 \cdot 6 + 0 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 8 \quad \text{w}$$

$$0 \cdot 6 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 5 \quad \text{w}$$

2)

setze:

$$x_3 = s, \quad x_4 = t$$

also:

$$x_1 = 7 - 2s - 3t$$

$$x_2 = 6 - 4s - 5t$$

also:

$$L = \{(7-2s-3t; 6-4s-5t; s; t) \mid s \in \mathbb{R} \wedge t \in \mathbb{R}\}$$

Ein Element der Lösungsmenge angeben

1) wähle dazu z.B: $s = 1, t = 1$:

$$\text{also: } (2; -3; 1; 1) \in L$$

2) Probe machen:

$$1 \cdot 2 + 0 \cdot -3 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 7 \quad \text{w}$$

$$0 \cdot 2 + 1 \cdot -3 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 6 \quad \text{w}$$

3)

setze:

$$x_4 = s, \quad x_5 = t$$

also:

$$x_1 = 9 - 2s - 3t$$

$$x_2 = 10 - 5s - 7t$$

$$x_3 = 11 - 8s - 6t$$

also:

$$L = \{(9-2s-3t; 10-5s-7t; 11-8s-6t; s; t) \mid s \in \mathbb{R} \wedge t \in \mathbb{R}\}$$

Ein Element der Lösungsmenge angeben

1) wähle dazu z.B: $s = 1, t = 2$:

$$\text{also: } (1; -9; -9; 1; 2) \in L$$

2) Probe machen:

$$1 \cdot 1 + 0 \cdot -9 + 0 \cdot -9 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 9 \quad \text{w}$$

$$0 \cdot 1 + 1 \cdot -9 + 0 \cdot -9 + 5 \cdot 1 + 7 \cdot 2 = 10 \quad \text{w}$$

4)

setze:

$$x_2 = s, \quad x_3 = t, \quad x_5 = u$$

also:

$$x_1 = 9 - 3s - 5t - 7u$$

$$x_4 = 2 - 4s - 6t - 8u$$

also:

$$x_1 = 9 - 3s - 5t - 7u$$

$$x_2 = s$$

$$x_3 = t$$

$$x_4 = 2 - 4s - 6t - 8u$$

$$x_5 = u$$

also:

$$L = \{(9-3s-5t-7u; s; t; 2-4s-6t-8u; u) \mid s \in \mathbb{R} \wedge t \in \mathbb{R} \wedge u \in \mathbb{R}\}$$

Ein Element der Lösungsmenge angeben

1) wähle dazu z.B: $s = 1, t = 1, u = 1$:

also: $(-6; 1; 1; -16; 1) \in L$

2) Probe machen:

$$1 \cdot -6 + 3 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + 0 \cdot -16 + 7 \cdot 1 = 9 \quad w$$

$$0 \cdot -6 + 4 \cdot 1 + 6 \cdot 1 + 1 \cdot -16 + 8 \cdot 1 = 2 \quad w$$

5)

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	Op	KS
0	0	-1	-1	-2	1	G1	-3
0	0	0	2	1	2	G2	5
2	2	2	1	0	-1	G3	6
0	0	-1	-1	-2	1	G4=G1	-3
0	0	0	2	1	2	G5=0G1+G2	5
2	2	0	-1	-4	1	G6=2G1+G3	0
0	0	-2	0	-3	4	G7=G5+2G4	-1
0	0	0	2	1	2	G8=G5	5
4	4	0	0	-7	4	G9=G5+2G6	5
0	0	1	0	3/2	-2	G10=G7/-2	1/2
0	0	0	1	1/2	1	G11=G8/2	5/2
1	1	0	0	-7/4	1	G12=G9/4	5/4

setze:

$$x_2 = s, \quad x_5 = t. \quad \text{Also:}$$

$$x_1 = 1 - s + 7/4t$$

$$x_2 = s$$

$$x_3 = -2 - 3/2t$$

$$x_4 = 1 - 1/2t$$

$$x_5 = t$$

$$\text{also: } L = \{(1-s+7/4t; s; -2-3/2t; 1-1/2t; t) \mid s \in \mathbb{R} \wedge t \in \mathbb{R}\}$$

Ein Element der Lösungsmenge angeben

1) wähle dazu z.B: $s = -1, t = -1$:

also: $(3; -1; -0,5; 1,5; -1) \in L$

2) Probe machen:

$$0 \cdot 3 + 0 \cdot -1 + -1 \cdot -0,5 + -1 \cdot 1,5 + -2 \cdot -1 = 1 \quad w$$

$$0 \cdot 3 + 0 \cdot -1 + 0 \cdot -0,5 + 2 \cdot 1,5 + 1 \cdot -1 = 2 \quad w$$

$$2 \cdot 0,25 + 2 \cdot -1 + 2 \cdot -0,5 + 1 \cdot 1,5 + 0 \cdot -1 = -1 \quad w$$

6)

x_1	x_2	x_3	b	Op	KS
1	-1	2	6	G1	8
0	1	1	1	G2	3
0	1	2	3	G3	6
-1	0	1	1	G4	1
1	-1	2	6	G5=G1	8
0	1	1	1	G6=G2	3
0	1	2	3	G7=G3	6
0	-1	3	7	G8=G1+G4	9
1	0	3	7	G9=G6+G5	11
0	1	1	1	G10=G6	3
0	0	-1	-2	G11=G6-G7	-3
0	0	4	8	G12=G6+G8	12
1	0	0	1	G13=3*G11+G9	2
0	1	0	-1	G14=G11+G10	0
0	0	-1	-2	G15=G11	-3
0	0	0	0	G16=4*G11+G12	0
1	0	0	1	G17=G13	2
0	1	0	-1	G18=G14	0
0	0	1	2	G19=G15/-1	3

$L=\{1; -1; 2\}$

Probe machen:

$$1 \cdot 1 + -1 \cdot -1 + 2 \cdot 2 = 6 \quad w$$

$$0 \cdot 1 + 1 \cdot -1 + 1 \cdot 2 = 1 \quad w$$

$$0 \cdot 1 + 1 \cdot -1 + 2 \cdot 2 = 3 \quad w$$

$$-1 \cdot 1 + 0 \cdot -1 + 1 \cdot 2 = 1 \quad w$$

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

Taschenrechner, beliebige Formelsammlungen, aber keine konkreten, gerechneten Beispiele.

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punktabzug !!!!

1) Geben Sie ein lineares Gleichungssystem (LGS) mit 1 Gleichung und 2 Unbekannten an. Geben Sie dazu die Lösungsmenge an. Falls die Lösungsmenge nicht direkt abgelesen werden kann, muß sie mit dem Gaußschen Algorithmus berechnet werden.

2) Geben Sie ein lineares Gleichungssystem (LGS) mit 2 Gleichungen und 3 Unbekannten an. Geben Sie dazu die Lösungsmenge an. Falls die Lösungsmenge nicht direkt abgelesen werden kann, muß sie mit dem Gaußschen Algorithmus berechnet werden.

3) Geben Sie ein lineares Gleichungssystem (LGS) mit 3 Gleichungen und 3 Unbekannten an. Geben Sie dazu die Lösungsmenge an. Falls die Lösungsmenge nicht direkt abgelesen werden kann, muß sie mit dem Gaußschen Algorithmus berechnet werden.

4) Geben Sie ein lineares Gleichungssystem (LGS) mit 3 Gleichungen, 2 Unbekannten und einer unendlichen Lösungsmenge an. Geben Sie dazu die Lösungsmenge an. Falls die Lösungsmenge nicht direkt abgelesen werden kann, muß sie mit dem Gaußschen Algorithmus berechnet werden.

5) Geben Sie ein lineares Gleichungssystem (LGS) mit 3 Gleichungen, 2 Unbekannten und einer endlichen Lösungsmenge an. Geben Sie dazu die Lösungsmenge an. Falls die Lösungsmenge nicht direkt abgelesen werden kann, muß sie mit dem Gaußschen Algorithmus berechnet werden.

6) Geben Sie ein lineares Gleichungssystem (LGS) mit 3 Gleichungen, 2 Unbekannten und einer leeren Lösungsmenge an. Geben Sie dazu die Lösungsmenge an. Falls die Lösungsmenge nicht direkt abgelesen werden kann, muß sie mit dem Gaußschen Algorithmus berechnet werden.

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

Taschenrechner, beliebige Formelsammlungen, aber keine konkreten, gerechneten Beispiele.

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

AUFGABEN

1) Gegeben sind die Funktionen f_1 , f_2 (Die Definitionsmenge und die Zielmenge ist jeweils \mathbb{R}) mit den Funktionsgleichungen

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{9}{2}$$

$$g(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{9}{2}$$

- a) Zeichnen Sie das Schaubild K_f von f und das Schaubild K_g von g in ein rechtwinkliges Koordinatensystem (x-Achse: $[-2; 6,5]$, y-Achse: $[-6,5 ; 8]$, LE = 1 cm)
- b) Bestimmen Sie rechnerisch den Schnittpunkt von K_g und der y-Achse.
- c) Bestimmen Sie rechnerisch den Schnittpunkt von K_g und der x-Achse.
- d) Bestimmen Sie rechnerisch den Scheitel von K_f
- e) Bestimmen Sie rechnerisch den Schnittpunkt von K_f und der y-Achse.
- f) Bestimmen Sie rechnerisch den Schnittpunkt von K_f und der x-Achse.
- g) Bestimmen Sie rechnerisch den Schnittpunkt der Schaubilder K_f und K_g

Bemerkung:

Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit der Zeichnung.

Sollten sich Unterschiede zwischen Rechnungen und Zeichnung ergeben, müssen diese erwähnt werden, ansonsten wird dies mit massivem Punkteabzug bewertet.

Lösung

b) Schnittpunkte $S_{yg}(0 | y_s)$ mit der y-Achse: $S_{yg}(0 | y_s) \in K_g$

$$y_s = -\frac{3}{2} \cdot 0 + \frac{9}{2} = 4,5$$

also:

$$\underline{\underline{S_{yg}(0 | 4,5)}}$$

c) Schnittpunkte $S_{xg}(x_s | 0)$ mit der x-Achse: $S_{xg}(x_s | 0) \in K_g$

$$-\frac{3}{2}x_s + \frac{9}{2} = 0 \iff x_s = 3$$

also:

$$\underline{\underline{S_{xg}(3 | 0)}}$$

d) Scheitel S von K_f

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{9}{2} = -\frac{1}{2}(x^2 - 6x + 9) = -\frac{1}{2}(x^2 - 2 \cdot 3x + 9) = -\frac{1}{2}(x - 3)^2$$

also: $S(3|0)$

=====

e) Schnittpunkte $S_{yf}(0 | y_s)$ mit der y-Achse: $S_{yf}(0 | y_s) \in K_f$

$$y_s = -\frac{1}{2} \cdot 0^2 + 3 \cdot 0 - 4,5 = -4,5$$

also:

$$\underline{\underline{S_{yf}(0 | -4,5)}}$$

=====

f) Schnittpunkte $S_{xf}(x_s | 0)$ mit der x-Achse: $S_{xf}(x_s | 0) \in K_f$

$$-\frac{1}{2}x_s^2 + 3x_s - \frac{9}{2} = 0 \iff x_s^2 - 6x_s + 9 = 0 \iff (x_s - 3)^2 = 0 \iff x_s = 3$$

also:

$$\underline{\underline{S_{xf}(3 | 0)}}$$

=====

g) Schnittpunkte $S(x_s | y_s)$ von K_f und K_g

(oder etwas mathematischer formuliert: $K_f \cap K_g = S(x_s | y_s)$):

$$-\frac{1}{2}x_s^2 + 3x_s - \frac{9}{2} = -\frac{3}{2}x_s + \frac{9}{2} \iff x_s^2 - 6x_s + 9 = 3x_s - 9 \iff x_s^2 - 9x_s + 18 = 0 \iff$$

$$x_{s1} = 3; x_{s2} = 6$$

$$y_{s1} = f(3) = -\frac{1}{2}3^2 + 3 \cdot 3 - \frac{9}{2} = 0; \quad y_{s2} = f(6) = -\frac{1}{2}6^2 + 3 \cdot 6 - \frac{9}{2} = -4,5$$

also: $S_1(3|0); S_2(6|-4,5)$

===== =====

Neue Aufgabe (muß noch ausgearbeitet werden):

1.1.1 Standard-Aufgabe

Legen Sie die Tangenten in den Punkten $B_1(-3 | ?)$ und $B_2(3 | ?)$ der Kurve mit der folgenden Funktionsgleichung an und bestimmen Sie deren Schnittpunkt.

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{7}{4}$$

1.1.1.1 Lösung

1) Ableitung

$$f'(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

2) Berechnung der y-Koordinaten von B_1 und B_2

$$f(-3) = -\frac{1}{4} \cdot (-3)^2 - \frac{1}{2} \cdot (-3) + \frac{7}{4} = -\frac{9}{4} + \frac{3}{2} + \frac{7}{4} = 1, \text{ also } B_1(-3 | 1)$$

$$f(3) = -\frac{1}{4} \cdot 3^2 - \frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{7}{4} = -\frac{9}{4} - \frac{3}{2} + \frac{7}{4} = -2, \text{ also } B_2(3 | -2)$$

3) Berechnung der Tangentensteigungen

$$\text{Steigung der Tangente } t_1: f'(-3) = -\frac{1}{2} \cdot (-3) - \frac{1}{2} = 1$$

$$\text{Steigung der Tangente } t_2: f'(3) = -\frac{1}{2} \cdot 3 - \frac{1}{2} = -2$$

4) Berechnung der Funktionsgleichungen der Tangenten

a) Nach der PSF gilt für t_1 :

$$\frac{y-1}{x-(-3)} = 1 \iff y = x + 4, \text{ also:}$$

$$t_1: y = x + 4$$

b) Nach der PSF gilt für t_2 :

$$\frac{y-(-2)}{x-3} = -2 \iff y = -2x + 4, \text{ also:}$$

$$t_2: y = -2x + 4$$

5) Schnittpunkte $S(x_s | y_s)$ von t_1 und t_2

(oder etwas mathematischer formuliert: $t_1 \cap t_2 = S(x_s | y_s)$):

$$x_s + 4 = -2x_s + 4 \iff$$

$$x_s = 0, \text{ also}$$

$$y_s = x_s + 4 = 0 + 4 = 4, \text{ also:}$$

$$S(0 | 4)$$

1.1.2 Wir basteln Übungsaufgaben

Durch Rückwärtsrechnen dieser gerade gelösten Aufgabe kann man eine neue Übungsaufgabe basteln, deren Lösung (Endergebnis) bekannt ist. Siehe dazu folgende Aufgabe:

1.1.3 Standard-Aufgabe

Legen Sie von S(0 | 4) aus die Tangenten an die Parabel mit der Funktionsgleichung

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{7}{4}$$

1.1.3.1 Lösung

1) Ableitung

$$f'(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

2) Tangentenbedingung, kurz TB

Der gesuchte Berührungspunkt sei B(x_B, y_B).

Die ZPF der Geradengleichung ergibt die sogenannte Tangentenbedingung:

$$\frac{y_B - 4}{x_B - 0} = f'(x_B) \quad (\text{TB})$$

Es gilt aber:

$$y_B = -\frac{1}{4}x_B^2 - \frac{1}{2}x_B + \frac{7}{4} \quad \text{und} \quad f'(x_B) = -\frac{1}{2}x_B - \frac{1}{2}$$

Setze dies in (TB) ein. Das ergibt dann:

$$\frac{-\frac{1}{4}x_B^2 - \frac{1}{2}x_B + \frac{7}{4} - 4}{x_B - 0} = -\frac{1}{2}x_B - \frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{4}x_B^2 - \frac{1}{2}x_B - \frac{9}{4} = -\frac{1}{2}x_B^2 - \frac{1}{2}x_B$$

$$\frac{1}{4}x_B^2 = \frac{9}{4}$$

$$x_B^2 = 9$$

also:

$$x_{B1} = -3, \quad y_{B1} = f(-3) = 1$$

$$x_{B2} = 3 \quad y_{B2} = f(3) = -2$$

damit:

$$B_1(-3 | 1)$$

$$B_2(3 | -2)$$

Didaktisch schlecht: S(0|4) Deshalb erkennt man das Steigungsdreieck schlecht !!!!!!!!!!!

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

Taschenrechner, beliebige Formelsammlungen, aber keine konkreten, gerechneten Beispiele.

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

AUFGABEN

Bemerkung: Mit Worten begründete, nachvollziehbare Lösungen !!!!!

1)

a) Zeichnen Sie die Schaubilder K_g und $K_{g'}$ der Funktionen g und g' im Intervall $[-5, 5]$ jeweils **untereinander**. 1 LE = 1 cm 4P

$$g(x) = \frac{1}{8}x^2$$

b) Was gibt $g'(2)$ konkret an, d.h. was bedeutet $g'(2)$ anschaulich (geometrisch), d.h. in welchem Steigungsdreieck kommt $g'(2)$ konkret als Wert im Schaubild K_g vor ?
Wo kommt $g'(2)$ konkret als Wert Schaubild K_g vor

6P

c) Was gibt $g(2)$ konkret an, d.h. was bedeutet $g(2)$ anschaulich (geometrisch), d.h. wo kommt $g(2)$ konkret als Wert im Schaubild K_g vor 3P

e) Geben Sie den Punkt P an, in dem die Funktion g die Steigung $0,75$ hat.
Begründen Sie rein rechnerisch und bestätigen Sie dies an der Zeichnung.

6P

2)

Bilden Sie (rein rechnerisch, ohne geometrische Begründung) von der folgenden Funktion h mit Hilfe der Limesbildung die Ableitung: 10P

$$h(x) = -4 \cdot x^2 + 2$$

3)

Bilden Sie von der obigen Funktion h die Ableitung, ohne die Limesbildung zu benutzen.
Geben Sie dazu die Ableitungsregeln an, die Sie benutzen !

3P

4)

Legen Sie von $Q(0 | -2)$ aus die Tangenten an die obige Parabel K_g
Berechnen Sie die Berührungspunkte und die Funktionsgleichungen der Tangenten.

18P

Lösung

1)

b) $g'(2)$ gibt die Steigung im Punkt mit der x-Koordinate 2 an. Das ist die Steigung der Tangente in diesem Punkt.

$g'(2)$ ist der Δy -Wert im Steigungsdreieck der Tangente im Punkt mit der x-Koordinate 2, wenn man $\Delta y = 1$ wählt.

$g'(2)$ gibt die zu der x-Koordinate 2 zugehörige y-Koordinate auf dem Schaubild Kg' an.

c) $g(2)$ gibt die zu der x-Koordinate 2 zugehörige y-Koordinate auf dem Schaubild Kg an.

d)

$$g(x) = \frac{1}{8}x^2; \quad g'(x) = \frac{1}{4}x$$

Sei $P(x_p | y_p)$ der Punkt mit der Steigung 0,75. Die Steigung im Punkt P ist einerseits

$$g'(x_p) = \frac{1}{4}x_p \quad \text{und andererseits: } g'(x_p) = 0,75 \quad \text{also:}$$

$$0,25 x_p = 0,75 \quad \Longleftrightarrow \quad x_p = 3$$

$$\text{Da } g(3) = \frac{1}{8} \cdot 3^2 = \frac{9}{8}, \text{ gilt damit: } P\left(3 \mid \frac{9}{8}\right)$$

2)

$$\begin{aligned} h'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-4(x + \Delta x)^2 + 2 - (-4x^2 + 2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-4x^2 - 8x\Delta x - 4\Delta x^2 + 2 + 4x^2 - 2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-8x\Delta x - 4\Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(-8x - 4\Delta x)}{\Delta x} \quad (\text{da } \Delta x \neq 0) \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} -8x - 4\Delta x = -8x \\ \text{Damit: } h'(x) &= -8x \end{aligned}$$

3)

$$h'(x) = -8x$$

4)

Ansatz (4P), Umformung (4P)

$$\frac{y_B - (-2)}{x_B - 0} = g'(x_B) \quad (\text{TB})$$

Es gilt aber:

$$y_B = \frac{1}{8}x_B^2 \quad \text{und} \quad g'(x_B) = \frac{1}{4}x_B$$

Setze dies in (TB) ein. Das ergibt dann:

$$\frac{\frac{1}{8}x_B^2 + 2}{x_B} = \frac{1}{4}x_B \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{8}x_B^2 + 2 = \frac{1}{4}x_B^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{8}x_B^2 = 2 \quad \Longleftrightarrow$$

$$x_B^2 = 16 \quad \text{also:}$$

$$x_{B1} = -4, \quad y_{B1} = g(-4) = 2 \quad (1P)$$

$$x_{B2} = 4, \quad y_{B2} = g(4) = 2 \quad (1P)$$

damit:

$$B_1(-4 \mid 2) \quad (1P)$$

$$B_2(4 \mid 2) \quad (1P)$$

b) Berechnung der Steigung der Tangenten:

$$g'(-4) = \frac{1}{4} \cdot (-4) = -1 \quad (1P)$$

$$g'(4) = \frac{1}{4} \cdot 4 = 1 \quad (1P)$$

b) Berechnung der Steigung der Tangenten:

$$\text{b1)} \quad \frac{y-2}{x_B - (-4)} = -1 \iff y-2 = -(x_B + 4) \iff y-2 = -x_B - 4 \iff y = -x_B - 2$$

$$\text{t}_1: y = -x_B - 2 \quad (2P)$$

$$\text{b2)} \quad \frac{y-2}{x_B - 4} = 1 \iff y-2 = x_B - 4 \iff y = x_B - 2$$

$$\text{t}_2: y = x_B - 2 \quad (2P)$$

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

Taschenrechner, beliebige Formelsammlungen, aber keine konkreten, gerechneten Beispiele.

Hinweise (unbedingt beachten):

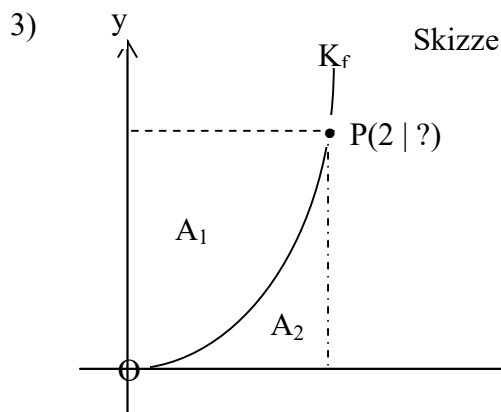
- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

AUFGABEN

1) Wie hoch muss der Jahreszinssatz sein, damit sich in 20 Jahren das Anfangskapital verdreifacht ? Das Ergebnis auf 2 Stellen hinter dem Komma runden !

2) In wie viel Jahren vermehrt sich ein Anfangskapital bei einer jährlichen Verzinsung von 3 % Jahreszinssatz auf das Vierfache ?

Das Ergebnis auf 2 Stellen hinter dem Komma runden !



K_f ist das Schaubild der Funktion mit der Funktionsgleichung $f(x) = x^2$

Die Fläche A_1 wird durch K_f , die y -Achse und die waagrechte Gerade, die durch P geht, begrenzt. Die Fläche A_2 wird durch K_f , die x -Achse und die senkrechte Gerade, die durch P geht, begrenzt.

a) Begründen Sie anschaulich, warum $A_1 > A_2$ ist.

b) Um das wie vielfache ist A_1 größer als A_2 ?

c) Um das wie vielfache ist A_1 größer als A_2 , wenn $P(a | ?) \in K_f$ ein beliebiger Punkt ist ($a > 0$) ?

4) Eine Parabel 3. Ordnung hat in $P(1 | 4)$ eine waagrechte Tangente und in $Q(0 | 2)$ einen Wendepunkt. Wie heißt die Funktionsgleichung der Parabel ?

Probe machen ! Falls das Ergebnis falsch ist und keine Probe gemacht wurde, gibt es Punkteabzug !

Lösungen

1)

$$K_{20} = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{20}$$

$$K_{20} = 3 \cdot K_0$$

also:

$$3K_0 = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{20} \iff \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{20} = 3 \iff 1 + \frac{p}{100} = \sqrt[20]{3} \iff p = (\sqrt[20]{3} - 1) \cdot 100$$

$$p_1 \approx 5,65 \%$$

Ergebnis: Der Jahreszinssatz beträgt 5,65 %

2)

$$K_n = K_0 \cdot 1,03^n$$

$$K_n = 4 \cdot K_0$$

also:

$$K_0 \cdot 1,03^n = 4K_0 \iff 1,03^n = 4 \iff n = \log_{1,03} 4 = \frac{\ln 4}{\ln 1,03}$$

$$n \approx 46,90$$

Ergebnis: Man benötigt 46,9 Jahre

3)

a) Sei A_R die Fläche des Rechtecks, dessen Diagonale durch O und P geht und dadurch in 2 Dreiecke geteilt wird. Da K_f unterhalb der Gerade (OP) liegt, gilt: $A_1 > A_R/2 > A_2$

Damit gilt dann:

$$A_1 > A_2$$

b)

$$A_2 = \int_0^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{8}{3}$$

$$A_1 = 2 \cdot f(2) - A_2 = 2 \cdot 2^2 - \frac{8}{3} = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{16/3}{8/3} = 2$$

andere Möglichkeit (Berechnung A_1):

$$A_1 = \int_0^2 (\text{Oberkurve} - \text{Unterkurve}) dx =$$

$$\int_0^2 (f(2) - x^2) dx = \int_0^2 (4 - x^2) dx =$$

$$= \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 8 - \frac{2^3}{3} = \frac{16}{3}$$

c)

$$A_2 = \int_0^a x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a = \frac{a^3}{3}$$

$$A_1 = a \cdot f(a) - A_2 = a \cdot a^2 - \frac{a^3}{3} = a^3 - \frac{a^3}{3} = \frac{2}{3} a^3$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\frac{2}{3} a^3}{\frac{1}{3} a^3} = 2$$

andere Möglichkeit (Berechnung A_1):

$$A_1 = \int_0^a (\text{Oberkurve} - \text{Unterkurve}) dx =$$

$$\int_0^a (f(a) - x^2) dx = \int_0^a (a^2 - x^2) dx =$$

$$= \left[a^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_0^a = a^3 - \frac{a^3}{3} = \frac{2}{3} a^3$$

4)

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

a) $P(1 \mid 4) \in K_f$

$$4 = a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d$$

$$4 = a + b + c + d \quad (G1)$$

b) $P(1 \mid 4)$ hat eine waagrechte Tangente

$$f'(1) = 0$$

$$3a \cdot 1^2 + 2b \cdot 1 + c = 0$$

$$3a + 2b + c = 0 \quad (G2)$$

c) $Q(0 \mid 2) \in K_f$

$$2 = a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d$$

$$d = 2$$

d) $Q(0 \mid 2)$ ist Wendepunkt

$$f''(0) = 0$$

$$6a \cdot 0 + 2b = 0$$

$$b = 0$$

e) $d = 2$ und $b = 0$ eingesetzt in (G1) und (G2) ergibt:

$$4 = a + c + 2$$

$$2 = a + c \quad (G3)$$

$$3a + c = 0 \quad (G4)$$

f) Mit TR (Taschenrechner), Additionsverfahren oder Gaußscher Algorithmus folgt aus (G3) und (G4):

$$a = -1, \quad c = 3$$

g) Ergebnis:

$$f(x) = -x^3 + 3x + 2$$

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

Formelsammlung, Taschenrechner

Hinweise (unbedingt beachten):

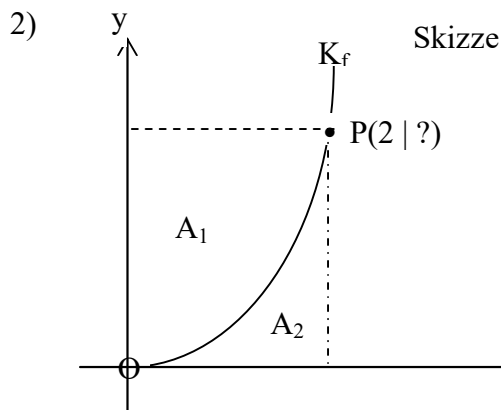
- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

AUFGABEN

1) Geben Sie eine konkrete Funktionsgleichung einer Funktion f und konkrete Werte a und b an, so daß gilt:

Die bilanzierte Fläche zwischen der x -Achse und der Kurve K_f und den Begrenzungsgeraden $x = a$ und $x = b$ ist 0.

Die tatsächliche Fläche zwischen der x -Achse und der Kurve K_f und den Begrenzungsgeraden $x = a$ und $x = b$ ist ungleich 0.



K_f ist das Schaubild der Funktion mit der Funktionsgleichung $f(x) = x^2$

Die Fläche A_1 wird durch K_f , die y -Achse und die waagrechte Gerade, die durch P geht, begrenzt. Die Fläche A_2 wird durch K_f , die x -Achse und die senkrechte Gerade, die durch P geht, begrenzt.

a) Begründen Sie anschaulich, warum $A_1 > A_2$ ist.

b) Um das wie vielfache ist A_1 größer als A_2 ?

c) Um das wie vielfache ist A_1 größer als A_2 , wenn $P(a | ?) \in K_f$ ein beliebiger Punkt ist ($a > 0$) ?

3) Gegeben ist die folgende Funktion:

a) $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x$

Bestätigen oder widerlegen Sie die folgende Vermutung:

"Der x-Wert des Wendepunkts ist das arithmetische Mittel (Mittelwert) der x-Werte der Extrempunkte"

4) Herr X behauptet:

"Es ist logisch, daß die Zeit, in der sich ein Kapital (bei einem Jahreszinssatz von 1%) versechsfacht, doppelt so groß ist, wie die Zeit, bis sich ein Kapital (bei einem Jahreszinssatz von 1%) verdreifacht".

Nehmen Sie dazu Stellung. Argumentieren Sie mathematisch !

Lösungen

1)

$$\int_{-2}^2 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_{-2}^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{(-2)^4}{4} = 0$$

$$I_1 = \int_{-2}^0 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_{-2}^0 = \frac{0^4}{4} - \frac{(-2)^4}{4} = -4$$

$$I_2 = \int_0^2 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{0^4}{4} = 4$$

Also:

$$A = |I_1| + |I_2| = |-4| + |4| = 8$$

2)

a) Sei A_R die Fläche des Rechtecks, dessen Diagonale durch O und P geht und dadurch in 2 Dreiecke geteilt wird. Da K_f unterhalb der Gerade (OP) liegt, gilt: $A_1 > A_R/2 > A_2$

Damit gilt dann:

$$A_1 > A_2$$

b)

$$A_2 = \int_0^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{8}{3}$$

$$A_1 = 2 \cdot f(2) - A_2 = 2 \cdot 2^2 - \frac{8}{3} = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{16/3}{8/3} = 2$$

andere Möglichkeit (Berechnung A_1):

$$A_1 = \int_0^2 (\text{Oberkurve} - \text{Unterkurve}) dx =$$

$$\int_0^2 (f(2) - x^2) dx = \int_0^2 (4 - x^2) dx =$$

$$= \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = 8 - \frac{2^3}{3} = \frac{16}{3}$$

c)

$$A_2 = \int_0^a x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^a = \frac{a^3}{3}$$

$$A_1 = a \cdot f(a) - A_2 = a \cdot a^2 - \frac{a^3}{3} = a^3 - \frac{a^3}{3} = \frac{2}{3} a^3$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\frac{2}{3} a^3}{\frac{1}{3} a^3} = 2$$

andere Möglichkeit (Berechnung A_1):

$$A_1 = \int_0^a (\text{Oberkurve} - \text{Unterkurve}) dx =$$

$$\int_0^a (f(a) - x^2) dx = \int_0^a (a^2 - x^2) dx =$$

$$= \left[a^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^a = a^3 - \frac{a^3}{3} = \frac{2}{3} a^3$$

3)

gegeben: $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x$

gesucht:

gilt: $x_W = \frac{x_{e1} + x_{e2}}{2}$?

a) Ableitungen

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x$$

$$f'(x) = -x^2 + 4x - 3$$

$$f''(x) = -2x + 4$$

$$f'''(x) = -2$$

b) Extrempunkte

Extrempunkte $E(x_e|y_e)$: $f'(x_e) = 0$

$$0 = -x_e^2 + 4x_e - 3$$

$$x_{e1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-3)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-4 \pm 2}{-2} = 2 \pm 1$$

$$x_{e1} = 1$$

$$x_{e2} = 3$$

$$f''(1) = -2 \cdot 1 + 4 = 2 > 0 \implies \text{Tiefpunkt}$$

$$f''(3) = -2 \cdot 3 + 4 = -2 < 0 \implies \text{Hochpunkt}$$

T(1 | ?) Tiefpunkt, H(3 | ?) Hochpunkt

c) Wendepunkte

Wendepunkte $W(x_w|y_w)$: $f''(x_w) = 0$

$$-2x_w + 4 = 0$$

$$x_w = 2$$

$$f'''(2) = -2 \neq 0 \implies \text{Wendepunkt}$$

$$y_w = -\frac{1}{3} \cdot 2^3 + 2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 = -\frac{2}{3}$$

damit:

$$W(2 | -\frac{2}{3}) \approx W(2 | -0,67) \text{ Wendepunkt}$$

d)

$$\frac{x_{e1} + x_{e2}}{2} = \frac{1 + 3}{2} = 2 = x_w$$

Damit wurde die Vermutung für diesen Fall bestätigt !

4)

a) Sei n die Anzahl der Jahre zur Versechsfachung des Kapitals

$$K_n = K_0 \cdot 1,01^n$$

$$K_n = 6 \cdot K_0$$

also:

$$K_0 \cdot 1,01^n = 6K_0 \iff 1,01^n = 6 \iff n = \log_{1,01} 6 = \frac{\ln 6}{\ln 1,01}$$

b) Sei m die Anzahl der Jahre zur Verdreifachung des Kapitals

$$K_m = K_0 \cdot 1,01^m$$

$$K_m = 3 \cdot K_0$$

also:

$$K_0 \cdot 1,01^m = 3K_0 \iff 1,01^m = 3 \iff m = \log_{1,01} 3 = \frac{\ln 3}{\ln 1,01}$$

c)

$$\frac{n}{m} = \frac{\frac{\ln 6}{\ln 1,01}}{\frac{\ln 3}{\ln 1,01}} = \frac{\ln 6}{\ln 3} \approx 1,6 \neq 2$$

Die Behauptung von Herrn X ist falsch.

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

Formelsammlung, Taschenrechner

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

AUFGABEN

1) Runden Sie die Ergebnisse auf eine Stelle hinter dem Komma, geben Sie die berechneten Winkel im Gradmass in aufsteigender Reihenfolge an. Überprüfen Sie die Ergebnisse mit dem Taschenrechner !!

Für welche Winkel x zwischen -3π und 2π gilt:

a) $\sin x = 0,2079$

b) $\sin x = -0,3255$

c) $\sin x = \frac{3}{2}$

d) $\cos x = 0,2923$

e) $\cos x = -0,766$

f) $\cos x = -2$

g) $\tan x = 19,0811$

h) $\tan x = -5,6712$

i) $\tan x = \frac{\pi}{2}$

2) Bestimmen Sie die Amplitude, Periode und Phasenverschiebung der folgenden Funktionen. Bestimmen Sie außerdem 3 benachbarte Wendepunkte (= Nullstellen) und die Hoch- und Tiefpunkte, die zwischen ihnen liegen. Alle Wendepunkte müssen positive x -Koordinaten haben, wobei der erste Wendepunkt möglichst nahe an $O(0|0)$ liegen muß.

Die Ergebnisse müssen exakt angegeben werden (also z.B. π und nicht $3,14$).

x -Koordinaten aller Punkte müssen im Bogenmaß angegeben werden.

Skizzieren Sie die Schaubilder dieser Funktionen.

Überprüfen Sie die Ergebnisse mit dem Taschenrechner !!

a) $f_1(x) = -2 \sin\left(-\frac{3}{2}\pi - 2x\right)$

b) $f_2(x) = 3 \sin(4\pi - 6\pi x)$

c) $f_3(x) = -\frac{1}{2} \sin\left(-\frac{7}{4}\pi - \frac{3}{2}x\right)$

d) $f_4(x) = \frac{5}{2} \sin(10\pi + 20x)$

Lösungen

a) $\sin x = 0,2079$

$$x_1 \approx 12^\circ$$

$$x_2 \approx 180^\circ - 12^\circ = 168^\circ$$

$$x_3 \approx -180^\circ - 12^\circ = -192^\circ$$

$$x_4 \approx -360^\circ + 12^\circ = -348^\circ$$

b) $\sin x = -0,3255$

$$x_1 \approx -19^\circ$$

$$x_2 \approx -180^\circ + 19^\circ = -161^\circ$$

$$x_3 \approx -360^\circ - 19^\circ = -379^\circ$$

$$x_4 \approx -540^\circ + 19^\circ = -521^\circ$$

$$x_5 \approx 180^\circ + 19^\circ = 199^\circ$$

$$x_6 \approx 360^\circ - 19^\circ = 341^\circ$$

c) $\sin x = \frac{3}{2}$

$$L = \{\}$$

d) $\cos x = 0,2923$

$$x_1 \approx 73^\circ$$

$$x_2 \approx -73^\circ$$

$$x_3 \approx -360^\circ + 73^\circ = -287^\circ$$

$$x_4 \approx -360^\circ - 73^\circ = -433^\circ$$

$$x_5 \approx 360^\circ - 73^\circ = 287^\circ$$

e) $\cos x = -0,766$

$$x_1 \approx 140^\circ$$

$$x_2 \approx -140^\circ$$

$$x_3 \approx -360^\circ + 140^\circ = -220^\circ$$

$$x_4 \approx -360^\circ - 140^\circ = -500^\circ$$

$$x_5 \approx 270^\circ - 50^\circ = 220^\circ$$

f) $\cos x = -2$

$$L = \{\}$$

g) $\tan x = 19,0811$

$$x_1 \approx 87^\circ$$

$$x_2 \approx 87^\circ + 180^\circ = 267^\circ$$

$$x_3 \approx 87^\circ - 180^\circ = -93^\circ$$

$$x_4 \approx -93^\circ - 180^\circ = -273^\circ$$

$$x_5 \approx -273^\circ - 180^\circ = -453^\circ$$

h) $\tan x = -5,6712$

$$x_1 \approx -80^\circ$$

$$x_2 \approx -80^\circ + 180^\circ = 100^\circ$$

$$x_3 \approx 100^\circ + 180^\circ = 280^\circ$$

$$x_4 \approx -80^\circ - 180^\circ = -260^\circ$$

$$x_5 \approx -260^\circ - 180^\circ = -440^\circ$$

i) $\tan x = \frac{\pi}{2}$

$$L = \{\}$$

2)

$$a) f_1(x) = -2 \sin(-\frac{3}{2}\pi - 2x) = -2 \sin(-2x - \frac{3}{2}\pi) = -2 \sin(-2(x + \frac{3}{4}\pi)) = 2 \sin(2(x + \frac{3}{4}\pi))$$

$$f_1(x) = 2 \sin(2(x + \frac{3}{4}\pi)) = 2 \sin(2(x - \pi + \frac{3}{4}\pi)) = 2 \sin(2(x - \frac{\pi}{4}))$$

$$A = |2| = 2; \quad p = \frac{2\pi}{2} = \pi; \quad v = -\frac{3}{4}\pi$$

$$W_1(\frac{\pi}{4} | 0); \quad H_1(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} | 2) = H_1(\frac{\pi}{2} | 2); \quad W_2(\frac{3\pi}{4} | 0); \quad T_1(\pi | -2); \quad W_3(\frac{5\pi}{4} | 0)$$

$$b) f_2(x) = 3 \sin(4\pi - 6\pi x) = 3 \sin(-6\pi x + 4\pi) = 3 \sin(-6\pi(x - \frac{2}{3})) = -3 \sin(6\pi(x - \frac{2}{3}))$$

$$A = |-3| = 3; \quad p = \frac{2\pi}{6\pi} = \frac{1}{3}; \quad v = \frac{2}{3}$$

$$f_2(x) = -3 \sin(6\pi(x - \frac{2}{3})) = -3 \sin(6\pi(x + 2 \cdot \frac{1}{3} - \frac{2}{3})) = -3 \sin(6\pi x)$$

Damit lassen sich die Wendepunkte, Tiefpunkte und Hochpunkte leichter angeben.

$$W_1(0 | 0); \quad T_1(\frac{1}{12} | -3); \quad W_2(\frac{1}{6} | 0); \quad H_1(\frac{1}{4} | 3); \quad W_3(\frac{1}{3} | 0)$$

$$c) f_3(x) = -\frac{1}{2} \sin(-\frac{7}{4}\pi - \frac{3}{2}x) = -\frac{1}{2} \sin(-\frac{3}{2}x - \frac{7}{4}\pi) = -\frac{1}{2} \sin(-\frac{3}{2}(x + \frac{7}{6}\pi))$$

$$= \frac{1}{2} \sin(\frac{3}{2}(x + \frac{7}{6}\pi))$$

$$A = |\frac{1}{2}| = \frac{1}{2}; \quad p = \frac{2\pi}{1,5} = \frac{4}{3}\pi; \quad v = -\frac{7}{6}\pi$$

$$f_3(x) = \frac{1}{2} \sin(\frac{3}{2}(x + \frac{7}{6}\pi)) = \frac{1}{2} \sin(\frac{3}{2}(x - \frac{4}{3}\pi + \frac{7}{6}\pi)) = \frac{1}{2} \sin(\frac{3}{2}(x - \frac{1}{6}\pi))$$

$$W_1(\frac{\pi}{6} | 0); \quad H_1(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} | \frac{1}{2}) = H_1(\frac{\pi}{2} | \frac{1}{2}); \quad W_2(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} | 0) = W_2(\frac{5\pi}{6} | 0);$$

$$T_1(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3} | -\frac{1}{2}) = T_1(\frac{7\pi}{6} | -\frac{1}{2}); \quad W_3(\frac{5\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} | 0) = W_3(\frac{3}{2}\pi | 0)$$

$$d) f_4(x) = \frac{5}{2} \sin(10\pi + 20x) = \frac{5}{2} \sin(20x + 10\pi) = \frac{5}{2} \sin(20(x + \frac{1}{2}\pi))$$

$$A = |\frac{5}{2}| = \frac{5}{2}; \quad p = \frac{2\pi}{20} = \frac{\pi}{10}; \quad v = -\frac{\pi}{2}$$

Da für eine Periode p einer Funktion gilt:

$f(x) = f(x \pm kp)$, wobei $k \in \mathbb{Z}$ (Menge aller ganzen Zahlen), gilt:

$$f_4(x) = \frac{5}{2} \sin(20(x + \frac{1}{2}\pi)) = \frac{5}{2} \sin(20(x - 5 \cdot \frac{\pi}{10} + \frac{1}{2}\pi)) = \frac{5}{2} \sin(20x)$$

$$W_1(0 | 0); \quad H_1(\frac{\pi}{40} | \frac{5}{2}); \quad W_2(\frac{\pi}{20} | 0); \quad T_1(\frac{\pi}{40} + \frac{\pi}{20} | -\frac{5}{2}) = T_1(\frac{3\pi}{40} | -\frac{5}{2});$$

$$W_3(\frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{20} | 0) = W_3(\frac{\pi}{10} | 0)$$

KLAUSUR 5 Mathematik 1 2BK11 Nachtermin 1 Zeit: 90 Minuten

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

Taschenrechner, beliebige Formelsammlungen, aber keine konkreten, gerechneten Beispiele.

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

AUFGABEN

1) Gegeben sind die Funktionen mit den Funktionsgleichungen:

$$f(x) = k - \frac{x^2}{k}$$

$$h(x) = k^3 - kx^2$$

wobei k ein Parameter ist ($k > 0$ und $k \neq 1$).

a) Zeichnen Sie die Kurven K_f und K_h für $k = 2$

b) Berechnen Sie das oberhalb der x -Achse gelegene Flächenstück, das von beiden Kurven begrenzt wird (und von k abhängig ist).

c) Für welchen Wert von k ($0 < k < 1$) hat diese Fläche den grössten Inhalt ?
Wie groß ist dieser ?

Lösungen:

b)

$$K_f \cap K_g = S(x_s | y_s):$$

$$k - \frac{x_s^2}{k} = k^3 - kx_s^2$$

$$kx_s^2 - \frac{x_s^2}{k} = k^3 - k$$

$$k^2 x_s^2 - x_s^2 = k^4 - k^2$$

$$x_s^2 (k^2 - 1) = k^4 - k^2$$

$$x_s^2 = \frac{k^4 - k^2}{k^2 - 1} = \frac{k^2 (k^2 - 1)}{k^2 - 1} = k^2$$

$$x_{s1} = k$$

$$x_{s2} = -k$$

$$\begin{aligned} A &= \int_{-k}^k \left(k - \frac{x^2}{k} - (k^3 - kx^2) \right) dx = \int_{-k}^k \left(k - \frac{x^2}{k} - k^3 + kx^2 \right) dx = \int_{-k}^k \left(kx^2 - \frac{x^2}{k} + k - k^3 \right) dx = \\ &= \left[\frac{kx^3}{3} - \frac{x^3}{3k} + kx - k^3 x \right]_{-k}^k = \frac{kk^3}{3} - \frac{k^3}{3k} + kk - k^3 k - \left(\frac{k(-k)^3}{3} - \frac{(-k)^3}{3k} + k(-k) - k^3(-k) \right) = \\ &= \frac{k^4}{3} - \frac{k^2}{3} + k^2 - k^4 + \frac{k^4}{3} - \frac{k^2}{3} + k^2 - k^4 = \frac{2k^4}{3} - \frac{2k^2}{3} + 2k^2 - 2k^4 = \frac{4k^2}{3} - \frac{4k^4}{3} \end{aligned}$$

c)

$$A(k) = \frac{4k^2}{3} - \frac{4k^4}{3}$$

$$A'(k) = \frac{8k}{3} - \frac{16k^3}{3}$$

$$A''(k) = \frac{8}{3} - 16k^2$$

Extrempunkte $E(k_e | y_e): A'(k_e) = 0$

$$A'(k_e) = \frac{8k_e}{3} - \frac{16k_e^3}{3} = 0$$

$$8k_e - 16k_e^3 = 0 \quad |:8$$

$$k_e - 2k_e^3 = 0 \quad |:k_e \neq 0$$

$$1 - 2k_e^2 = 0$$

$$2k_e^2 = 1$$

$$k_e^2 = 0,5$$

$$k_{e1} = \sqrt{0,5} \quad k_{e2} = -\sqrt{0,5} \text{ (keine Lösung)}$$

$$A(\sqrt{0,5}) = \frac{4 \cdot 0,5}{3} - \frac{4 \cdot 0,25}{3} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$A''(\sqrt{0,5}) = \frac{8}{3} - 16 \cdot 0,5 = \frac{8}{3} - 8 < 0$$

also ist $A(\sqrt{0,5})$ lokales Maximum

Ergebnis:

Für $k = \sqrt{0,5}$ hat die Fläche den grössten Inhalt ($=1/3$)