

Name, Vorname:

Hilfsmittel:
keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß in DRUCKSCHRIFT auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punktabzug !!!!

AUFGABEN

1) (12P)

Bestimmen Sie die Definitionsmenge und die Lösungsmenge (es sind keine Umformungen nötig) der folgenden Gleichungen (Grundmenge = \mathbb{R}):

a) $\frac{1}{x} = 0$

b) $3x = 3x$

c) $x^2 = -16$

d) $x = 2x$

e) $\frac{1}{0} = \frac{x}{x-5}$

f) $121x + 5 = 121x + 13$

2) (4P)

a) Herr X behauptet, daß die durch den Äquivalenzpfeil bezeichnet Umformung eine Äquivalenzumformung ist:

$$x^2 = 25 \iff x = 5$$

Nehmen Sie dazu Stellung (anhand der Definition der Äquivalenzumformung).

b) Geben Sie eine allgemeingültige Gleichung an und begründen Sie (anhand der Definition der Allgemeingültigkeit), warum diese allgemeingültig ist.

3) (15P)

Bestimmen Sie die folgenden Mengen (keine Venn – Diagramme)

Wenn Sie die Menge in beschreibender Form angeben wollen, muß diese möglichst „einfach“ sein.

Beispiel:

Statt

$$M = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 10 \vee x = 11 \vee x = 12 \vee x = 13 \vee x = 14 \vee x = 15\}$$

muß Folgendes angegeben werden:

$$M = \{x \in \mathbb{N} \mid 10 \leq x \leq 15\}$$

Bemerkung:

Mit \mathbb{N} wird die Menge der natürlichen Zahlen (einschließlich der 0) bezeichnet.

a) Bestimmen Sie $A \cap B$

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 40\}, B = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 50\}$$

b) Bestimmen Sie $B \cup C$

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid 15 \leq x \leq 18\}, C = \{x \in \mathbb{N} \mid 17 < x \leq 19\}$$

c) Bestimmen Sie $A \cup B$

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leq x \leq 8\}, B = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 5\}$$

d) Bestimmen Sie $E \cap F$

$$E = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}, F = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 2\}$$

e) Bestimmen Sie $E \setminus F$

$$E = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}, F = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 2\}$$

4) (22P)

Formen Sie die folgenden Terme (so wie im Unterricht) um:

a) $(-x-y)^2$

b) $3(x + y + z) - 5(x + y - z) - 2(y - x - z)$

c) $\left(-\frac{1}{2}ab\right) \cdot \left(+\frac{8}{3}bc\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}ac\right)$

d) $\left(\frac{2z}{3xy} + \frac{5x}{6yz} - \frac{6y}{7xz}\right) \cdot 42xyz$

e) $\frac{x^2 - x^2 y^2}{x^2 + x^2 y} : \frac{x + xy}{x^2 + x^2 y}$

f) $\frac{\frac{x^2}{2y} - \frac{y^2}{2x}}{\frac{2}{x} - \frac{2}{y}}$

Falls Sie noch Zeit haben, können „Proben“ gemacht werden.

Lösungen:

1)

12P

a) $\frac{1}{x} = 0$ $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $L = \emptyset$

b) $3x = 3x$ $D = \mathbb{R}$ $L = \mathbb{R}$

c) $x^2 = -16$ $D = \mathbb{R}$ $L = \emptyset$

d) $x = 2x$ $D = \mathbb{R}$ $L = \{0\}$

e) $\frac{1}{0} = \frac{x}{x-5}$ $D = \emptyset$ $L = \emptyset$

f) $121x + 5 = 121x + 13$ $D = \mathbb{R}$ $L = \emptyset$

2)

4P

a) 2P

Dies ist keine Äquivalenzumformung, da die 2 Gleichungen verschiedene Lösungsmengen haben.

$x^2 = 25$ $L = \{-5; 5\}$

$x = 5$ $L = \{5\}$

b) 2P

$x = x$ ist eine allgemeingültige Gleichung, da $L = \mathbb{R}$

3) 15P

a) $A \cap B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \geq 51\}$

b) $B \cup C = \{x \in \mathbb{N} \mid 15 \leq x \leq 19\}$

c) $A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 8\}$

d) $E \cap F = \emptyset$

e) $E \setminus F = \emptyset$

4) 22P

a) 2P

$$(-x - y)^2 = (-x + (-y))^2 = (-x)^2 + 2(-x)(-y) + (-y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

oder:

$$(-x - y)^2 = (-(x + y))^2 = (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

b) 3P

$$3(x + y + z) - 5(x + y - z) - 2(y - x - z) =$$

$$3x + 3y + 3z - 5x - 5y + 5z - 2y + 2x + 2z = -4y + 10z$$

c) 3P

$$\left(-\frac{1}{2}ab\right) \cdot \left(+\frac{8}{3}bc\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}ac\right) = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(+\frac{8}{3}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot a \cdot b \cdot b \cdot c \cdot a \cdot c = a^2 b^2 c^2$$

d) 3P

$$\left(\frac{2z}{3xy} + \frac{5x}{6yz} - \frac{6y}{7xz}\right) \cdot 42xyz = \frac{2z}{3xy} \cdot 42xyz + \frac{5x}{6yz} \cdot 42xyz - \frac{6y}{7xz} \cdot 42xyz$$

$$= 28z^2 + 35x^2 - 36y^2$$

e) 6P

$$\frac{x^2 - x^2 y^2}{x^2 + x^2 y} : \frac{x + xy}{x^2 + x^2 y} = \frac{x^2 - x^2 y^2}{x^2 + x^2 y} \cdot \frac{x^2 + x^2 y}{x + xy} = \frac{(x^2 - x^2 y^2) \cdot (x^2 + x^2 y)}{(x^2 + x^2 y)(x + xy)} = \frac{(x^2 - x^2 y^2)}{(x + xy)} =$$
$$\frac{x^2(1 - y^2)}{x(1 + y)} = \frac{x^2(1 - y)(1 + y)}{x(1 + y)} = x(1 - y)$$

f) 5P

$$\frac{\frac{x^2}{2y} - \frac{y^2}{2x}}{\frac{2}{x} - \frac{2}{y}} = \frac{\frac{x^3}{2xy} - \frac{y^3}{2xy}}{\frac{2y}{xy} - \frac{2x}{xy}} = \frac{\frac{x^3 - y^3}{2xy}}{\frac{2y - 2x}{xy}} = \frac{(x^3 - y^3)xy}{2xy(2y - 2x)} = \frac{x^3 - y^3}{4(y - x)}$$

KLAUSUR 1 Mathematik 1 2BKI1 Nachtermin 1 Zeit: 90 Minuten*Name, Vorname:*

Hilfsmittel:

Taschenrechner

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß in DRUCKSCHRIFT auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

AUFGABEN

Die Grundmenge ist $G = \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Definitionsmenge D und die Lösungsmenge L der Gleichungen (wie im Unterricht, also mit Hauptnenner multiplizieren).

$$1) \quad \frac{2}{3x-4} - \frac{1}{20} = \frac{5}{6x-8} \quad (4P)$$

$$2) \quad \frac{2}{x-1} - \frac{4}{x+1} = \frac{1}{x-1} \quad (4P)$$

$$3) \quad \frac{2+x}{x-1} = \frac{3+2x}{x+1} - 1 \quad (4P)$$

$$4) \quad \frac{x^2 + 4x + 3}{x+3} = x - 2 \quad (4P)$$

$$5) \quad \frac{-3x+6}{2x-4} + \frac{x}{x-2} = -\frac{7}{6} \quad (4P)$$

$$6) \quad \frac{4}{x-1} + \frac{1}{5} = \frac{3}{1-x} + \frac{8}{5} \quad (4P)$$

$$7) \quad x + \frac{2x}{x-1} = 0 \quad (4P)$$

$$8) \quad \frac{32}{8x+16} = \frac{5x}{2x+4} \quad (4P)$$

$$9) \quad \frac{x^2}{x^2-1} - \frac{x-1}{x+1} = \frac{1-2x}{1-x^2} \quad (4P)$$

$$10) \quad \frac{5x-5}{x+1} + 2 = \frac{6x-3}{2x-1} + 4 \quad (4P)$$

$$11) \quad \frac{x}{x-2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2x-4} \quad (4P)$$

$$12) \quad \frac{3-x}{x+1} - 4 = 0 \quad (4P)$$

$$13) \quad \frac{1}{x} + \frac{2}{x-2} = 0 \quad (4P)$$

Lösungen:

$$L = \{-2\}$$

$$L = \{5/3\}$$

$$L = \{-2\}$$

$$L = \{\}$$

$$L = \{-1\}$$

$$L = \{6\}$$

$$L = \{0; -1\}$$

$$L = \{8/5\}$$

$$L = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$$

$$L = \{\}$$

$$L = \{1\}$$

$$L = \{-0,2\}$$

$$L = \{2/3\}$$

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß in DRUCKSCHRIFT auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

AUFGABEN1) 10P

Formen Sie die folgenden Terme (so wie im Unterricht) um:

a)
$$\frac{2-b}{a-1} \cdot \frac{a^2-1}{4-b^2}$$

b)
$$\frac{(r-s)^2}{r^2-rs} : \frac{r-s}{r^2+s^2}$$

2) 5P

Bestimmen Sie:

a) $X \cup X$ b) $Z \cap Z$ c) $A \setminus A$ d) $B \cup \emptyset$ e) $B \cap \emptyset$

3) 10P

Bestimmen Sie die Lösungsmenge L der Gleichungen (ohne Mitternachtsformel).

a)
$$(x-10)^2 = 84$$

b)
$$(x^2 - 20x + 4)^2 = -2$$

c)
$$(x+1) \cdot (x-2) \cdot (x+3) = 0$$

4) 10PBestimmen Sie die Definitionsmenge und die Lösungsmenge (es sind keine Umformungen nötig) der folgenden Gleichungen (Grundmenge = \mathbb{R}):

a)
$$\frac{1}{x} = 0$$

b)
$$3x = 3x$$

c)
$$x = 2x$$

d)
$$\frac{1}{0} = \frac{x}{x-5}$$

e)
$$121x + 5 = 121x + 13$$

5)

16P

Ermitteln Sie die Lösungsmenge folgender LGS (jeweils als Matrix angegeben).

Falls Lösungsmenge nicht leer ist, bitte jeweils ein Element aus der Lösungsmenge angeben.

a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 9 & 18 \\ 0 & 1 & -7 & 15 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & -17 \\ -9 & 0 & 1 & 13 \end{pmatrix}$$

d)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -8 & 17 \\ 1 & 0 & 9 & -16 \end{pmatrix}$$

e)

$$\begin{pmatrix} 1 & 19 & -5 & 12 \end{pmatrix}$$

f)

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Lösungen

1)

10P

$$\begin{aligned} & \frac{2-b}{a-1} \cdot \frac{a^2-1}{4-b^2} = \\ & \frac{2-b}{a-1} \cdot \frac{a^2-1^2}{2^2-b^2} = \\ \text{a) 5P} & \frac{2-b}{a-1} \cdot \frac{(a-1)(a+1)}{(2-b)(2+b)} = \\ & \frac{(2-b) \cdot (a-1)(a+1)}{(a-1) \cdot (2-b)(2+b)} = \frac{a+1}{2+b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{(r-s)^2}{r^2-rs} : \frac{r-s}{r^2+s^2} = \\ & \frac{(r-s)^2}{r^2-rs} \cdot \frac{r^2+s^2}{r-s} = \\ \text{b) 5P} & \frac{(r-s)^2}{r(r-s)} \cdot \frac{r^2+s^2}{r-s} = \\ & \frac{(r-s)^2 \cdot (r^2+s^2)}{r(r-s) \cdot (r-s)} = \\ & \frac{r^2+s^2}{r} = \end{aligned}$$

2)

5P

a) X b) Z c) \emptyset d) B e) \emptyset

3)

10P

a) 4P

$$\begin{aligned} (x-10)^2 &= 84 \iff \\ x-10 &= \sqrt{84} \vee x-10 = -\sqrt{84} \iff \\ x &= 10 + \sqrt{84} \vee x = 10 - \sqrt{84} \end{aligned}$$

also:

$$L = \{10 + \sqrt{84}; 10 - \sqrt{84}\}$$

b) 3P

$$(x^2 - 20x + 4)^2 = -2$$

also $L = \{\}$

Die folgende Argumentation ist falsch:

$$(x^2 - 20x + 4)^2 = -2 \iff$$

$$\sqrt{x^2 - 20x + 4} = \sqrt{-2} \implies L = \{\}, \text{ da } \sqrt{-2} \text{ nicht definiert.}$$

Genauso könnte man dann fälschlicherweise "begründen":

Die Lösungsmenge von $x^2 = 4$ ist $L = \{\}$, denn:

$$x^2 = 4 \iff x^2 - 13 = 4 - 13 \iff x^2 - 13 = -9 \iff$$

$$\sqrt{x^2 - 13} = \sqrt{-9} \implies L = \{\}, \text{ da } \sqrt{-9} \text{ nicht definiert.}$$

c) 3P

$$L = \{-1; 2; -3\}$$

4)

10P

a) $\frac{1}{x} = 0$ $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $L = \emptyset$

b) $3x = 3x$ $D = \mathbb{R}$ $L = \mathbb{R}$

c) $x = 2x$ $D = \mathbb{R}$ $L = \{0\}$

d) $\frac{1}{0} = \frac{x}{x-5}$ $D = \emptyset$ $L = \emptyset$

e) $121x + 5 = 121x + 13$ $D = \mathbb{R}$ $L = \emptyset$

5)

16P

a) 2P

$L = \{\}$

b) 2P

$L = \{(7; 5; 3)\}$

$(7; 5; 3) \in L$

c) 3P

$L = \{(x_1; x_2; x_3) \mid x_2 = -17 - 4x_1 \wedge x_3 = 13 + 9x_1 \wedge x_1 \in \mathbb{R}\}$

$(0; 17; 13) \in L$

d) 3P

$L = \{(x_1; x_2; x_3) \mid x_2 = 17 + 8x_3 \wedge x_1 = -16 - 9x_3 \wedge x_3 \in \mathbb{R}\}$

$(-16; 17; 0) \in L$

e) 3P

$L = \{(x_1; x_2; x_3) \mid x_1 = 12 - 19x_2 + 5x_3 \wedge x_2 \in \mathbb{R} \wedge x_3 \in \mathbb{R}\}$

$(12; 0; 0) \in L$

f) 3P

$L = \{(x_1; x_2) \mid x_1 = 3 + 2x_2 \wedge x_2 \in \mathbb{R}\}$

$(3; 0) \in L$

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

Taschenrechner

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß in DRUCKSCHRIFT auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punktabzug !!!!

AUFGABEN

1)

10P

Geben Sie die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen an:

a) $x^3 = 0$

b) $x^3 = -1$

c) $(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$

d) $-x^2 = 4$

e) $|x^2| = -9$

f) $-x = x$

g) $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 2$

h) $|x|+1 = 0$

i) $x \cdot (x-1) \cdot (x+1) = 0$

j) $x + x = x * x$

2)

12P

Formen Sie die folgenden Terme (so wie im Unterricht) um (Terme vereinfachen):

a) $-\frac{3}{4}x - \frac{3}{2} \cdot \frac{1-x}{2} + 7\left(\frac{1}{4} + x\right)$

b) $\frac{3x+8}{x-2} + \frac{2+6x}{2-x} - 1$

3)

2P

Machen Sie die quadratische Ergänzung zum folgenden Term:

$$x^2 - \frac{7}{4\pi}x + ? = (? - ?)^2$$

4)

12P

Die Grundmenge ist $G = \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Definitionsmenge D und die Lösungsmenge L der Gleichungen (wie im Unterricht, also mit Hauptnenner multiplizieren).

a) $\frac{9}{x+3} - \frac{x}{x-3} = 2 - \frac{3}{x-3} - \frac{3x}{x+3}$

b) $\frac{3}{x-4} - \frac{24}{x^2-16} = \frac{3}{x+4} - x^2 + 16$

5)

4P

Die Summe dreier reeller Zahlen ergibt 10.

a) Geben Sie die Lösungsmenge an (beschreibende Form).

b) Geben Sie ein Element der Lösungsmenge an.

6)

12P

Bestimmen Sie die Lösungsmenge durch quadratische Ergänzung:

(Keine Dezimalzahlen sondern Brüche verwenden).

$$3x^2 - \frac{7}{2}x - \frac{5}{2} = 0$$

Lösungen

1)

10P

- a) $x^3 = 0$ $L = \{0\}$
 b) $x^3 = -1$ $L = \{-1\}$
 c) $(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$ $L = \mathbb{R}$
 d) $-x^2 = 4$ $L = \{\}$
 e) $|x^2| = -9$ $L = \{\}$
 f) $-x = x$ $L = \{0\}$
 g) $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$ $L = \{\}$
 h) $|x| + 1 = 0$ $L = \{\}$
 i) $x \cdot (x-1) \cdot (x+1) = 0$ $L = \{0, 1, -1\}$
 j) $x + x = x \cdot x$ $L = \{0, 2\}$

2)

12P

a)

$$-\frac{3}{4}x - \frac{3}{2} \cdot \frac{1-x}{2} + 7\left(\frac{1}{4} + x\right) = \frac{-3x}{4} - \frac{3(1-x)}{4} + \frac{7}{4} + 7x = \frac{-3x}{4} - \frac{3(1-x)}{4} + \frac{7}{4} + \frac{28x}{4} = \frac{-3x - 3(1-x) + 7 + 28x}{4} = \frac{-3x - 3 + 3x + 7 + 28x}{4} = \frac{4 + 28x}{4} = \frac{4(1+7x)}{4} = 1 + 7x$$

b)

$$\frac{3x+8}{x-2} + \frac{2+6x}{2-x} - 1 = \frac{3x+8}{x-2} - \frac{2+6x}{x-2} - 1 = \frac{3x+8}{x-2} - \frac{2+6x}{x-2} - \frac{x-2}{x-2} = \frac{3x+8 - (2+6x) - (x-2)}{x-2} = \frac{3x+8-2-6x-x+2}{x-2} = \frac{-4x+8}{x-2} = \frac{-4(x-2)}{x-2} = -4$$

3)

2P

$$x^2 - \frac{7}{4\pi}x = x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{4\pi}x = x^2 - 2 \cdot \frac{7}{8\pi}x, \text{ also:}$$

$$x^2 - \frac{7}{4\pi}x + \left(\frac{7}{8\pi}\right)^2 = \left(x - \frac{7}{8\pi}\right)^2$$

4)

12P

a)

$$\frac{9}{x+3} - \frac{x}{x-3} = 2 - \frac{3}{x-3} - \frac{3x}{x+3} \quad | \cdot (x+3)(x-3)$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$$

$$9(x-3) - x(x+3) = 2(x-3)(x+3) - 3(x+3) - 3x(x-3)$$

$$9x - 27 - x^2 - 3x = 2x^2 - 18 - 3x - 9 - 3x^2 + 9x$$

$$-x^2 + 6x - 27 = -x^2 + 6x - 27$$

$$L = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$$

b)

$$\frac{3}{x-4} - \frac{24}{x^2-16} = \frac{3}{x+4} - x^2 + 16 \quad | \cdot (x-4)(x+4)$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-4; +4\}$$

$$3(x+4) - 24 = 3(x-4) - x^2(x^2-16) + 16(x^2-16)$$

$$3x + 12 - 24 = 3x - 12 - x^4 + 16x^2 + 16x^2 - 256$$

$$x^4 - 32x^2 + 256 = 0$$

$$(x^2)^2 - 32x^2 + 256 = 0$$

$$(x^2)^2 - 2 \cdot 16 \cdot x^2 + 16^2 = 0$$

$$(x^2 - 16)^2 = 0$$

$$(x^2 - 16)(x^2 - 16) = 0$$

$$(x-4) \cdot (x+4) \cdot (x-4) \cdot (x+4) = 0$$

$$x_1 = 4; x_2 = -4$$

$$L = \{\}$$

5)

4P

Es sei: 1. Zahl: x_1 2. Zahl: x_2 3. Zahl: x_3

Dann gilt:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 10$$

Es gilt:

$$x_1 = 10 - x_2 - x_3$$

x_1	x_2	x_3	b	Op	KS
1	1	1	10	G1	13

$$\text{damit: } L = \{(x_1; x_2; x_3) \mid x_1 = 10 - x_2 - x_3 \wedge x_2 \in \mathbb{R} \wedge x_3 \in \mathbb{R}\}$$

5)

12P

$$3x^2 - \frac{7}{2}x - \frac{5}{2} = 0 \quad | : 3$$

$$x^2 - \frac{7}{6}x - \frac{5}{6} = 0 \quad | + \frac{5}{6}$$

$$x^2 - \frac{7}{6}x = \frac{5}{6}$$

$$x^2 - \frac{7}{6}x + \left(\frac{7}{12}\right)^2 = \frac{5}{6} + \left(\frac{7}{12}\right)^2$$

$$\left(x - \frac{7}{12}\right)^2 = \frac{5}{6} + \frac{49}{144} \iff \left(x - \frac{7}{12}\right)^2 = \frac{120}{144} + \frac{49}{144} \iff \left(x - \frac{7}{12}\right)^2 = \frac{169}{144} \iff$$

$$\left|x - \frac{7}{12}\right| = \frac{13}{12}$$

$$x - \frac{7}{12} = \frac{13}{12} \vee x - \frac{7}{12} = -\frac{13}{12} \iff x = \frac{5}{3} \vee x = -\frac{1}{2}$$

$$L = \left\{\frac{5}{3}; -\frac{1}{2}\right\}$$

KLAUSUR 3 Mathematik 1 2BKI1 Nachtermin 1 Zeit: 75 Minuten

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß in DRUCKSCHRIFT auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punktabzug !!!!

AUFGABEN

1) 20P

Ein Bauer will für genau 100 Euro Pferde, Kühe und Hennen kaufen (kein Rückgeld). Eine Henne kostet 0,25Euro, eine Kuh 1 Euro und ein Pferd 15 Euro. Da er nur einen kleinen Bauernhof besitzt, muss die Anzahl der Pferde, Kühe und Hennen zusammen 100 ergeben. Der Bauer muss außerdem von jeder Tierart mindestens ein Tier kaufen. Benutzen Sie den Algorithmus von Gauss.

Tipp:

Es sei:

Anzahl der Hennen: x_1

Anzahl der Kühe: x_2

Anzahl der Pferde: x_3

2) 12P

Lösen Sie durch quadratische Ergänzung:

a) $-\frac{1}{30}x^2 - \frac{1}{15}x + \frac{7}{6} = 0$

b) $x^2 - 17x + \frac{355}{4} = 0$

3) 18P

a) Bestimmen Sie die Definitionsmenge und die Lösungsmenge der folgenden Gleichung:

$$\frac{x-2}{x+2} + \frac{x+2}{x-2} = 5$$

Die einzelnen Lösungen müssen maximal vereinfacht werden, wie z.B:

$$\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Keine Dezimalzahlen sondern Brüche verwenden.

b) Machen Sie die Probe (exakte Rechnung, nicht mit genäherten Werten).

Keine Dezimalzahlen sondern Brüche verwenden.

Lösungen:

1)

Es sei:

Anzahl der Hennen: x_1

Anzahl der Kühe: x_2

Anzahl der Pferde: x_3

Dann gilt:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 100 \quad (2P)$$

$$0,25 x_1 + x_2 + 15 x_3 = 100 \quad (6P)$$

x_1	x_2	x_3	b	Op	KS
1	1	1	100	G1	103
0,25	1	15	100	G2	116,25
1	1	1	100	G3=G1	103
1	4	60	400	G4=4G2	465
1	1	1	100	G5=G3	103
0	-3	-59	-300	G6=G3-G4	-362
3	0	-56	0	G7=3G6+G7	-53
0	-3	-59	-300	G8=G6	-362
1	0	-56/3	0	G9 =G7/3	-53
0	1	59/3	100	G10=G6/-3	-362

Es gilt:

$$x_1 = 56/3 \cdot x_3$$

$$x_2 = 100 - 59/3 \cdot x_3$$

damit: (6P)

$$L = \{ (x_1; x_2; x_3) \mid x_1=56/3 \cdot x_3 \wedge x_2=100-59/3 \cdot x_3 \wedge x_3 \in N_1 \wedge x_3 \geq 1 \wedge x_2 \in N_1 \wedge x_2 \geq 1 \wedge x_1 \in N_1 \wedge x_1 \geq 1 \}$$

wobei mit N_1 die natürlichen Zahlen größer oder gleich 1 bezeichnet werden.

Damit x_1 und x_2 ganzzahlig werden, muss x_3 ein Vielfaches von 3 sein.

Es bietet sich also an, es sofort mit $x_3 = 3$ zu probieren:

$$x_1 = 0 + 56/3 \cdot 3 = 56$$

$$x_2 = 100 - 59/3 \cdot 3 = 41$$

$$x_3 = 0 + 1 \cdot 3 = 3$$

(6P)

Damit weiß man sofort:

$$(56; 41; 3) \in L$$

2)

a)

$$\begin{aligned}
 &\underline{\underline{D = R}} \\
 &-\frac{1}{30}x^2 - \frac{1}{15}x + \frac{7}{6} = 0 \quad | \cdot -30 \\
 &x^2 + 2x - 35 = 0 \\
 &x^2 + 2 \cdot 1 \cdot x = 35 \\
 &x^2 + 2 \cdot 1 \cdot x + 1^2 = 35 + 1^2 \\
 &(x+1)^2 = 36 \\
 &x+1 = 6 \vee x+1 = -6 \\
 &x_1 = 5 ; x_2 = -7 \\
 &\underline{\underline{L = \{5 ; -7\}}}
 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
 &\underline{\underline{D = R}} \\
 &x^2 - 17x + \frac{355}{4} = 0 \\
 &x^2 - 2 \cdot \frac{17}{2}x = -\frac{355}{4} \\
 &x^2 - 2 \cdot \frac{17}{2} \cdot x + \left(\frac{17}{2}\right)^2 = -\frac{355}{4} + \left(\frac{17}{2}\right)^2 \\
 &\left(x - \frac{17}{2}\right)^2 = -\frac{355}{4} + \frac{289}{4} = -16,5 < 0 \\
 &\underline{\underline{L = \{\}}}
 \end{aligned}$$

3) a)

$$\begin{aligned}
 &\frac{x-2}{x+2} + \frac{x+2}{x-2} = 5 \quad | \cdot (x+2)(x-2) \\
 &D = R \setminus \{2; -2\} \\
 &(x-2)^2 + (x+2)^2 = 5(x+2)(x-2) \\
 &x^2 - 4x + 4 + x^2 + 4x + 4 = 5(x^2 - 4) \\
 &2x^2 + 8 = 5x^2 - 20 \\
 &-3x^2 = -28 \\
 &x^2 = \frac{28}{3} \\
 &L = \left\{-\sqrt{\frac{28}{3}} ; \sqrt{\frac{28}{3}}\right\}
 \end{aligned}$$

b)

1. Probe

$$\begin{aligned}
 &\frac{\sqrt{\frac{28}{3}} - 2}{\sqrt{\frac{28}{3}} + 2} + \frac{\sqrt{\frac{28}{3}} + 2}{\sqrt{\frac{28}{3}} - 2} = 5 \quad | \cdot \left(\sqrt{\frac{28}{3}} + 2\right) \left(\sqrt{\frac{28}{3}} - 2\right) \\
 &\left(\sqrt{\frac{28}{3}} - 2\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{28}{3}} + 2\right)^2 = 5 \left(\sqrt{\frac{28}{3}} + 2\right) \left(\sqrt{\frac{28}{3}} - 2\right) \\
 &\sqrt{\frac{28}{3}}^2 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{28}{3}} + 2^2 + \sqrt{\frac{28}{3}}^2 + 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{28}{3}} + 2^2 = 5 \left(\sqrt{\frac{28}{3}}^2 - 2^2\right) \\
 &\frac{28}{3} - 4\sqrt{\frac{28}{3}} + 4 + \frac{28}{3} + 4\sqrt{\frac{28}{3}} + 4 = 5 \left(\frac{28}{3} - 4\right) \\
 &\frac{56}{3} + 8 = \frac{140}{3} - 20 \quad | \cdot 3 \\
 &56 + 24 = 140 - 60 \\
 &80 = 80 \quad (\text{w})
 \end{aligned}$$

2. Probe:

$$\frac{\left(-\sqrt{\frac{28}{3}}\right)-2}{\left(-\sqrt{\frac{28}{3}}\right)+2} + \frac{\left(-\sqrt{\frac{28}{3}}\right)+2}{\left(-\sqrt{\frac{28}{3}}\right)-2} = 5$$

$$\frac{-\sqrt{\frac{28}{3}}-2}{-\sqrt{\frac{28}{3}}+2} + \frac{-\sqrt{\frac{28}{3}}+2}{-\sqrt{\frac{28}{3}}-2} = 5 \quad | \cdot \left(-\sqrt{\frac{28}{3}}+2\right) \left(-\sqrt{\frac{28}{3}}-2\right)$$

$$\left(-\sqrt{\frac{28}{3}}-2\right)^2 + \left(-\sqrt{\frac{28}{3}}+2\right)^2 = 5 \left(\left(-\sqrt{\frac{28}{3}}+2\right) \left(-\sqrt{\frac{28}{3}}-2\right)\right)$$

$$\left(-\sqrt{\frac{28}{3}}\right)^2 - 2 \cdot 2 \left(-\sqrt{\frac{28}{3}}\right) + 2^2 + \left(-\sqrt{\frac{28}{3}}\right)^2 + 2 \cdot 2 \left(-\sqrt{\frac{28}{3}}\right) + 2^2 = 5 \left(\left(-\sqrt{\frac{28}{3}}\right)^2 - 2^2\right)$$

$$\frac{28}{3} + 4\sqrt{\frac{28}{3}} + 4 + \frac{28}{3} - 4\sqrt{\frac{28}{3}} + 4 = 5 \left(\frac{28}{3} - 4\right)$$

$$\frac{56}{3} + 8 = \frac{140}{3} - 20 \quad | \cdot 3$$

$$56 + 24 = 140 - 60$$

$$80 = 80 \quad (\text{w})$$

Name, Vorname:

Hilfsmittel:
keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß in DRUCKSCHRIFT auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

AUFGABEN

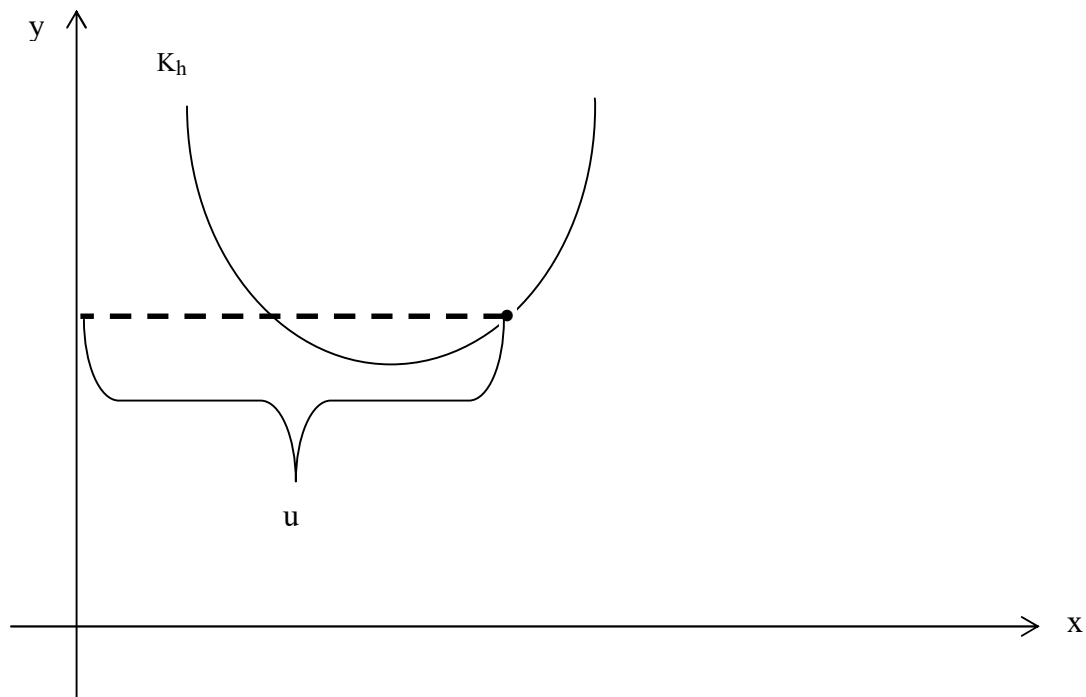
Bemerkungen: Rechnungen, Zeichnungen, Begründungen, usw. **genauso** wie im **Unterricht!!**

1)

3P

Gegeben sei eine Funktion h (mit dem Schaubild K_h).

Herr W.B. Gierig will wissen, wie groß $h(u)$ und $h'(u)$ ist. Zeichnen Sie deshalb $h(u)$ und $h'(u)$ in die folgende Zeichnung ein, so dass Herr W.B. Gierig diese Werte mit dem Geodreieck ablesen kann.



BITTE beachten Sie auch die Rückseite dieses zweiseitigen Blattes.

Vielen Dank !!!!!

2)

20P

Geben Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen an:

(c, k sind **konstante** Werte)

Falls eine Ableitungen nicht mit dem bisher im Unterricht gelehrt Wissen gemacht werden kann, bitte den Text „nicht machbar“ dazu schreiben.

a) $h_1(x) = g(x) + c$

b) $h_2(x) = k \cdot g(x)$

c) $h_3(x) = g(x) + h(x)$

d) $h_4(x) = 10 \cdot 5$

e) $h_5(x) = 3 \cdot x^7 + 10$

f) $h_6(x) = x$

g) $h_7(x) = k^c$

h) $h_8(x) = 0$

i) $h_9(x) = g(x) \cdot h(x)$

j) $h_{10}(x) = (2x+1)^3$

3)

4P

In welchen Punkten hat das Schaubild K_g der Funktion g mit der Funktionsgleichung

$$g(x) = x^3$$

eine negative Steigung.

Genau zeichnerische und rechnerische Begründung!

4)

12P

Gegeben ist die Funktion f mit:

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2$$

a) Bestimmen Sie die Schnittpunkt(e) von K_f mit der y-Achse.

b) Bestimmen Sie die Schnittpunkt(e) von K_f mit der x-Achse.

c) Bestimmen Sie die Punkt(e) von K_f , die die Steigung 0 haben.

Schnittpunkte mit Koordinaten bitte konkret angeben (und unterstreichen) !!

5)

11P

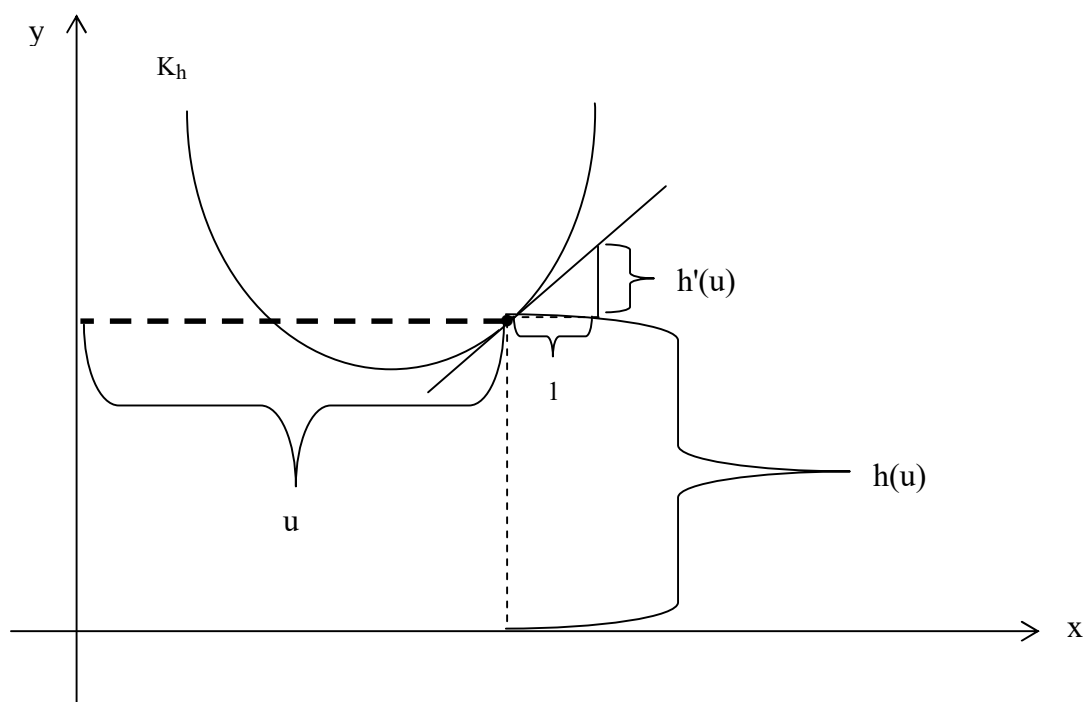
Bilden Sie (rein rechnerisch, ohne geometrische Begründung) von der folgenden Funktion h mit Hilfe der **Limesbildung** die Ableitungsfunktion von

$$h(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{mit } a \in \mathbb{R} \text{ und } b \in \mathbb{R} \text{ und } c \in \mathbb{R}$$

Lösungen:

1)

3P



2)

20P

a) $h_1'(x) = g'(x)$

b) $h_2'(x) = k \cdot g'(x)$

c) $h_3'(x) = g'(x) + h'(x)$

d) $h_4'(x) = 0$

e) $h_5'(x) = 21 \cdot x^6$

f) $h_6'(x) = 1$

g) $h_7'(x) = 0$

h) $h_8'(x) = 0$

i) nicht machbar

j) $h_{10}'(x) = 3(2x+1)^2 \cdot 2 = 6(2x+1)^2$

3)

4P

a) $g'(x) = 3x^2 \geq 0$, da $x^2 \geq 0$

b) Alle Tangenten haben positive Steigung

4)

12P

a) 2P

Der gesuchte Schnittpunkt mit der y-Achse sei $S_y(0 | y_s)$. Dort gilt:

$$y_s = f(0) = 2 \cdot 0^3 + 3 \cdot 0^2 = 0, \text{ also } S_y(0 | 0).$$

b) 4P

Der gesuchte Schnittpunkt mit der x-Achse sei $S_x(x_s | 0)$. Dort gilt:

$$0 = f(x_s) = 2 \cdot x_s^3 + 3 \cdot x_s^2 \text{ also}$$

$$0 = 2 \cdot x_s^3 + 3 \cdot x_s^2 \iff$$

$$0 = x_s^2(2x_s + 3) \iff x_s^2 = 0 \text{ oder } 2x_s + 3 = 0 \iff x_s = 0 \text{ oder } x_s = -1,5 \text{ also}$$

$$S_{x1}(0 | 0) \text{ und } S_{x2}(-1,5 | 0)$$

c) 6P

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2$$

$$f'(x) = 6x^2 + 6x$$

Der gesuchte Punkt mit Steigung 0 sei $P(x_s | y_s)$. Dort ist die Steigung 0, also gilt:

$$0 = f'(x_s) = 6x_s^2 + 6x_s \text{ also}$$

$$0 = 6x_s^2 + 6x_s \iff$$

$$0 = x_s(6x_s + 6) \iff x_s = 0 \text{ oder } 6x_s + 6 = 0 \iff x_s = 0 \text{ oder } x_s = -1 \text{ also}$$

$$y_{s1} = f(0) = 2 \cdot 0^3 + 3 \cdot 0^2 = 0 \text{ also } P_1(0 | 0)$$

$$y_{s1} = f(-1) = 2 \cdot (-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 = -2 + 3 = 1 \text{ also } P_2(-1 | 1)$$

5)

11P

$$\begin{aligned} h'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a(x + \Delta x)^2 + b(x + \Delta x) + c - ax^2 - bx - c}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a(x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2) + bx + b\Delta x + c - ax^2 - bx - c}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{ax^2 + 2ax\Delta x + a\Delta x^2 + bx + b\Delta x + c - ax^2 - bx - c}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2ax\Delta x + a\Delta x^2 + b\Delta x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2ax\Delta x + a\Delta x^2 + b\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(2ax + a\Delta x + b)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2ax + a\Delta x + b = 2ax + b \end{aligned}$$

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

Taschenrechner

Hinweise (unbedingt beachten):

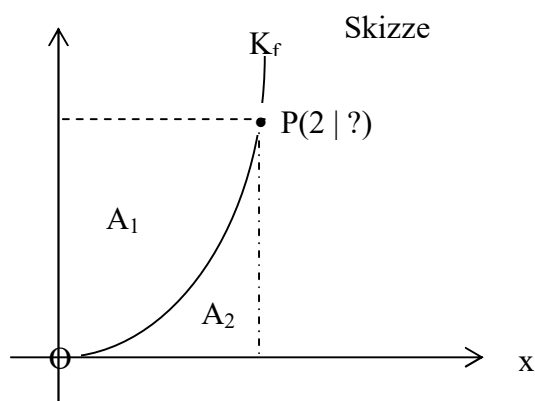
- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß in DRUCKSCHRIFT auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

AUFGABENBemerkungen: Rechnungen, Zeichnungen, Begründungen, usw. **genauso** wie im **Unterricht!!**1) 20PGegeben ist die Funktion f mit der Funktionsgleichung:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2$$

Untersuchen Sie die Schaubilder jeweils bzgl:

- a) Schnittpunkte mit der x -Achse (berechnen und angeben)
- b) Die ersten 3 Ableitungen (berechnen und angeben)
- c) Extrempunkte (berechnen und angeben)
- d) Wendepunkte (berechnen und angeben)

2) 15P K_f ist das Schaubild der Funktion mit der Funktionsgleichung $f(x) = x^2$

Die Fläche A_1 wird durch K_f , die y -Achse und die waagrechte Gerade, die durch P geht, begrenzt. Die Fläche A_2 wird durch K_f , die x -Achse und die senkrechte Gerade, die durch P geht, begrenzt.

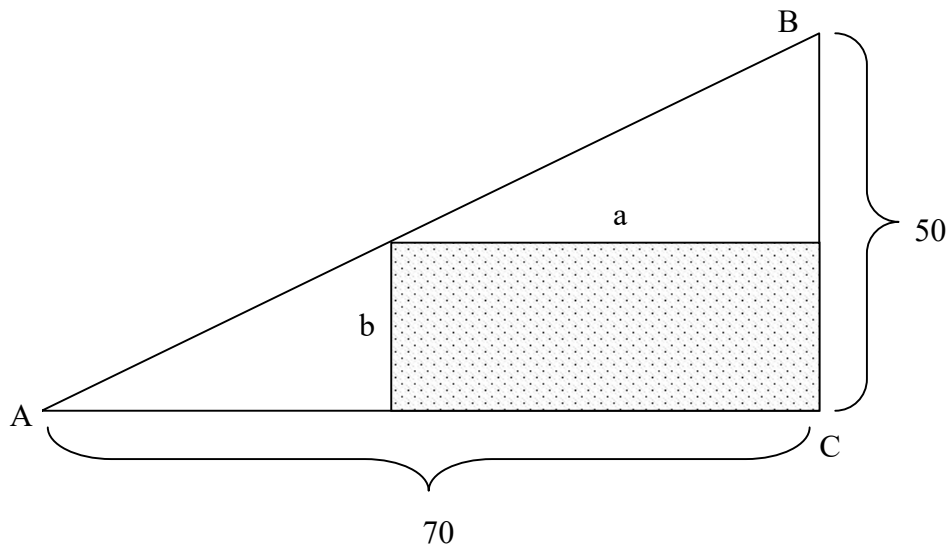
- a) Begründen Sie anschaulich, warum $A_1 > A_2$ ist.
- b) Um das wie vielfache ist A_1 größer als A_2 ?
- c) Um das wie vielfache ist A_1 größer als A_2 , wenn $P(a | ?) \in K_f$ ein beliebiger Punkt ist ($a > 0$) ?

3)

15P

Aus einer dreieckigen Marmorplatte mit den angegebenen Maßen (in LE also Längeneinheiten) soll ein rechteckiges Stück herausgeschnitten werden.

Berechnen Sie diejenigen Werte für die Streckenlängen a und b , für den der Flächeninhalt des Rechtecks maximal wird, und geben Sie den maximalen Flächeninhalt an.



1)

gegeben: $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2$

a) Schnittpunkte $S_x(x_s | 0)$ mit der x-Achse: $S_x(x_s | 0) \in K_f$ (5P)

$$0 = \frac{1}{2}x_s^3 - 3x_s^2 \quad | \cdot 2$$

$$0 = x_s^3 - 6x_s^2 \iff 0 = x_s^2(x_s - 6)$$

Fall1: $0 = x_s - 6$

Fall2: $x_s^2 = 0$

$$x_s = 6$$

$$x_s = 0$$

$$x_{s1} = 6$$

$$x_{s2} = 0$$

damit Nullstellen von f:

$$S_{x1}(6 | 0), S_{x2}(0 | 0)$$

b) Ableitungen (3P)

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2$$

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x$$

$$f''(x) = 3x - 6$$

$$f'''(x) = 3$$

c) Extrempunkte (8P)

Extrempunkte $E(x_e | y_e): f'(x_e) = 0$

$$0 = \frac{3}{2}x_e^2 - 6x_e \quad | \cdot \frac{2}{3}$$

$$0 = x_e^2 - 4x_e \iff 0 = x_e(x_e - 4)$$

Fall1: $x_e - 4 = 0$

Fall2: $x_e = 0$

$$x_e = 4$$

$$x_{e2} = 0$$

$$x_{e1} = 4$$

$$f''(4) = 3 \cdot 4 - 6 = 6 > 0 \implies \text{Tiefpunkt}$$

$$f''(0) = 3 \cdot 0 - 6 = -6 < 0 \implies \text{Hochpunkt}$$

$$y_{e1} = f(4) = \frac{1}{2} \cdot 4^3 - 3 \cdot 4^2 = -16$$

$$y_{e2} = f(0) = \frac{1}{2} \cdot 0^3 - 3 \cdot 0^2 = 0$$

damit:

T(4 | -16) Tiefpunkt, H(0 | 0) Hochpunkt

d) Wendepunkte (4P)

Wendepunkte $W(x_w | y_w): f''(x_w) = 0$

$$0 = 3x_w - 6$$

$$x_w = 2$$

$$f'''(2) = 3 \neq 0 \implies \text{Wendepunkt}$$

$$y_w = f(2) = \frac{1}{2} \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 = -8$$

damit: W(2 | -8) Wendepunkt

2)

15P

a) 3P

Sei A_R die Fläche des Rechtecks, dessen Diagonale durch O und P geht und dadurch in 2 Dreiecke geteilt wird. Da K_f unterhalb der Gerade (OP) liegt, gilt: $A_1 > A_R/2 > A_2$

Damit gilt dann:

$$A_1 > A_2$$

b) 5P

$$A_1 = \int_0^2 (\text{Oberkurve} - \text{Unterkurve}) dx =$$

$$\int_0^2 (f(2) - x^2) dx = \int_0^2 (4 - x^2) dx =$$

$$= \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = 8 - \frac{2^3}{3} = \frac{16}{3}$$

c) 7P

$$A_2 = \int_0^a x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^a = \frac{a^3}{3}$$

$$A_1 = \int_0^a (\text{Oberkurve} - \text{Unterkurve}) dx =$$

$$\int_0^a (f(a) - x^2) dx = \int_0^a (a^2 - x^2) dx =$$

$$= \left[a^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^a = a^3 - \frac{a^3}{3} = \frac{2}{3} a^3$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\frac{2}{3} a^3}{\frac{1}{3} a^3} = 2$$

3)

15P

1) Zielfunktion:

$$A(a,b) = a \cdot b$$

2) Nebenbedingung:

$$\frac{b}{50} = \frac{70-a}{70} \implies b = \frac{50(70-a)}{70}$$

3) Reduktion auf 1 Variable:

$$A(a) = \frac{50(70-a)}{70} \cdot a \implies$$

$$A(a) = \frac{(50 \cdot 70 - 50a) \cdot a}{70} = \frac{50 \cdot 70 \cdot a - 50a^2}{70} = 50a - \frac{50}{70} a^2 = 50a - \frac{5}{7} a^2$$

4) Ableitungen:

$$A'(a) = 50 - \frac{10}{7} a$$

$$A''(a) = -\frac{10}{7}$$

5) Definitionsbereich:

$$D = [0; 70]$$

6) Lokale Extremwerte $E(a_e | A_e): A'(a_e) = 0$:

$$50 - \frac{10}{7}a_e = 0 \quad | \cdot 7$$

$$350 - 10a_e = 0 \implies 10a_e = 350 \implies a_e = 35 \in D$$

$$A''(35) = -\frac{10}{7} < 0 \text{ also relatives Maximum bei}$$

$$a_e = 35$$

$$A(35) = 50 \cdot 35 - \frac{5}{7} \cdot 35^2 = 875$$

7) Randwertuntersuchung:

$$A(0) = 0$$

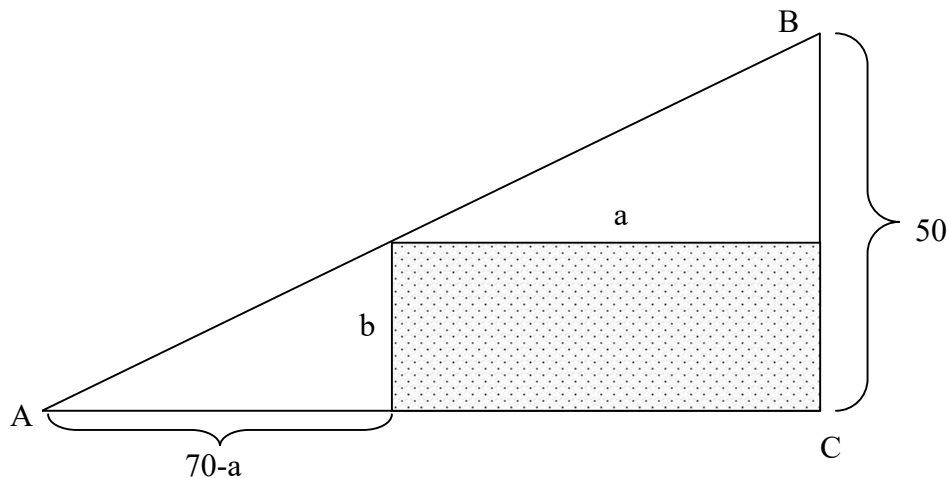
$$A(70) = 0$$

8) Ergebnis:

Die Fläche erreicht für $a_e = 35$ LE ihr absolutes Maximum $A(35) = 875$ FE

=====

Alternativer Lösungsansatz:



Wenn man im linken Eckpunkt A des Dreiecks ein rechtwinkliges Koordinatensystem legt (deren x-Achse durch die Punkte A und C geht), dann hat die Gerade durch A und B die Funktionsgleichung:

$$f(x) = \frac{50}{70}x = \frac{5}{7}x$$

$$\text{Dann gilt: } b = f(70-a) = \frac{5}{7}(70-a) = 50 - \frac{5}{7}a$$

also:

$$A(a) = a \cdot \left(50 - \frac{5}{7}a\right) = 50a - \frac{5}{7}a^2$$

jetzt weiter wie in der 1. Lösung!

KLAUSUR 6 Mathematik 1 2BK11 6.7.2017 Zeit: 60 Minuten

Name, Vorname:

Hilfsmittel:
Taschenrechner

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß in DRUCKSCHRIFT auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punktabzug !!!!

AUFGABEN

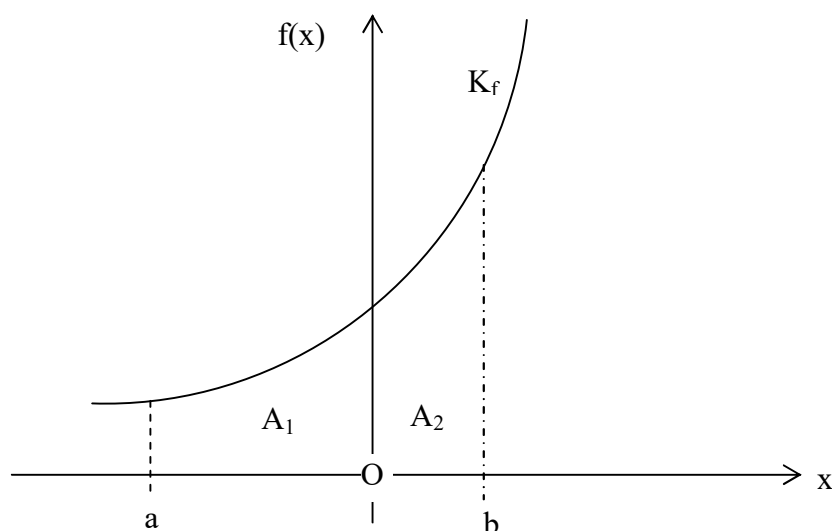
Bemerkungen: Rechnungen, Zeichnungen, Begründungen, usw. **genauso** wie im **Unterricht!!**

1)

7P

Gegeben ist die Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x) = e^x$

Skizze:



Geben Sie einen ganzzahligen Wert für die x-Koordinate a und einen beliebigen reellen Wert für die x-Koordinate $b > a$ an, so daß die Flächen A_1 und A_2 gleich groß werden.

Exakte Werte angeben!

2)

4P

gegeben:

Funktion f mit Funktionsgleichung $f(x) = 2x^3 + e^{-4x+5}$

a) Kurve K_g entsteht durch Verschiebung der Kurve K_f um $+7$ in x -Richtung.

Wie heißt die Funktionsgleichung der Kurve K_g ?

b) Kurve K_h entsteht durch Streckung der Kurve K_f um $+(1/9)$ in x -Richtung.

Wie heißt die Funktionsgleichung der Kurve K_h ?

Bem: die entstehenden Funktionsterme müssen nicht vereinfacht werden!

3)

6P

a) Leiten Sie h ab: $h(x) = -30 - 40x + 7e^{5x}$

b) Bestimmen Sie $\int (-1 - 2x + 7 \cdot e^{5x}) dx =$

4)

8P

Das Schaubild der Funktion f mit:

$$f(x) = e^{-x}$$

die Gerade mit der Gleichung $x = a$, die y-Achse und die x-Achse schließen für $a > 0$ im 1. Quadranten eine Fläche ein, die von a abhängt.

a) Berechnen Sie diese Fläche.

b) Welchen Wert hat die Fläche, wenn a gegen unendlich strebt?
Berechnen Sie.

5)

10P

Gegeben ist die Funktion h mit:

$$h(x) = e^{2x} - 1$$

Ihr Schaubild ist K_h

a) Geben Sie die Nullstellen von h an.

b) Zeigen Sie, dass K_h keine Hoch-, Tief- und Wendepunkte besitzt.
Rechnerische Begründung bei allen Aufgabenteilen!

6)

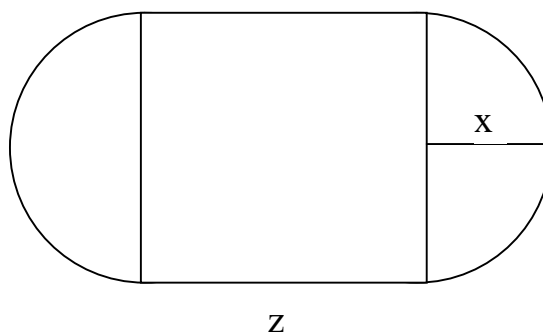
5P

Geben Sie die Funktionsgleichung einer Kurve K_f an, die folgende Eigenschaften hat:

Eine Nullstelle befindet sich an der x-Koordinate -1 und eine doppelte Nullstelle befindet sich an der x-Koordinate 2. Außerdem liegt der Punkt $P(0 | 8)$ auf K_f

7)

10P



Eine 400 m Laufbahn besteht aus 2 parallelen Strecken mit zwei angesetzten Halbkreisen. Für welchen Radius x der Halbkreise wird die rechteckige Spielfläche maximal ?

Lösungen:

1)

7P

Da die 2 Flächen gleich groß sind, gilt: $\int_a^0 e^x dx = \int_0^b e^x dx$, also:

$$[e^x]_a^0 = [e^x]_0^b \implies e^0 - e^a = e^b - e^0 \implies 1 - e^a = e^b - 1 \implies e^b = 2 - e^a$$

wähle z.B. $a = -1$, dann gilt $e^b = 2 - e^{-1} \implies b = \ln(2 - e^{-1})$

2)

4P

a) $g(x) = 2(x-7)^3 + e^{-4(x-7)+5}$

b) $h(x) = 2(x/(1/9))^3 + e^{-4(x/(1/9))+5} = 2(9x)^3 + e^{-4(9x)+5}$

3)

6P

a) $h(x) = -40 + 35 e^{5x}$

b) $\int (-1 - 2x + 7 \cdot e^{5x}) dx = -x - x^2 + 7 \cdot \frac{1}{5} e^{5x} + 3x = -x - x^2 + \frac{7}{5} e^{5x}$

4)

8P

$$A = \int_0^a e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^a = -e^{-a} - (-e^{-0}) = -e^{-a} + 1 = 1 - e^{-a}$$

$$\lim_{a \rightarrow \infty} A = \lim_{a \rightarrow \infty} (1 - e^{-a}) = 1$$

5)

10P

$$h'(x) = 2e^{2x}$$

$$h''(x) = 4e^{2x}$$

a) Schnittpunkte mit der x-Achse

Schnittpunkte $S_x(x_s | 0)$ mit der x-Achse: $S_x(x_s | 0) \in K_h$

$$e^{2x_s} - 1 = 0 \iff e^{2x_s} = 1 \iff 2x_s = \ln 1 \iff 2x_s = 0 \iff x_s = 0$$

also: $S_x(0 | 0)$

b) Extrempunkte:

Extrempunkte $E(x_e | y_e)$: $h'(x_e) = 0$

$$2e^{2x_e} = 0 \iff e^{2x_e} = 0 \iff L = \emptyset$$

Es gibt also keine Extrempunkte

c) Wendepunkte:

Wendepunkte $W(x_w | y_w)$: $h''(x_w) = 0$

$$4e^{2x_w} = 0 \iff e^{2x_w} = 0 \iff L = \emptyset$$

Es gibt also keine Wendepunkte

6)

5P

Geben Sie die Funktionsgleichung einer Kurve K_f an, die folgende Eigenschaften hat:

Eine Nullstelle befindet sich an der x-Koordinate -1 und eine doppelte Nullstelle befindet sich an der x-Koordinate 2. Außerdem liegt der Punkt $P(0 | 8)$ auf K_f

$$f(x) = c(x+1)(x-2)^2$$

$$8 = f(0) = c(0+1)(0-2)^2 \implies 8 = 4c \implies c = 2, \text{ also}$$

$$f(x) = 2(x+1)(x-2)^2$$

7)

a) Zielfunktion:

$$A(x, z) = 2x \cdot z$$

b) Nebenbedingung:

$$400 = 2z + 2\pi x$$

$$200 = z + \pi x$$

$$z = 200 - \pi x$$

c) Reduktion auf 1 Variable:

$$A(x) = 2x (200 - \pi x) = 400x - 2\pi x^2$$

d) Ableitungen:

$$A'(x) = 400 - 4\pi x$$

$$A''(x) = -4\pi$$

e) Definitionsbereich: $D = [0 ; \frac{200}{\pi}]$ f) Lokale Extremwerte $E(x_e | A_e)$:

$$A'(x_e) = 0:$$

$$0 = 400 - 4\pi x_e$$

$$x_e = 100 / \pi \approx 31,83$$

$$x_e \in D$$

$$A\left(\frac{100}{\pi}\right) = 400 \cdot \frac{100}{\pi} - 2\pi \frac{10000}{\pi^2} = \frac{20000}{\pi} \approx 6366,2$$

g) Randwertuntersuchung:

$$A(0) = 0 \qquad A\left(\frac{200}{\pi}\right) = 2 \cdot \frac{200}{\pi} \left(200 - \pi \frac{200}{\pi}\right) = 0$$

h) Ergebnis:

Die maximale Fläche wird für $x = 100/\pi$ mit $A_e \approx 6366,2$ erreicht.