

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punktabzug !!!!

AUFGABEN**I) (4P)**

Definieren Sie die folgenden Begriffe:

- 1) Aussage,
- 2) Aussageform

II) (4P)

Ordnen Sie den unten stehenden sprachlichen Gebilden jeweils eine der folgenden

Eigenschaften zu: mathematisch sinnlos, wahr, falsch, Aussageform

Sprachliches Gebilde	Eigenschaft
Außerhalb von Raum und Zeit.	
Alle ungeraden Zahlen sind Primzahlen	
$\neg x \vee x$ (x ist eine Variable für eine Zahl)	
$x - 6 < 10$ (x ist eine Variable für eine Zahl)	

III) (12P)

"BK11" ist die Menge aller Schüler dieser Klasse. "BK11A" ist die Menge aller Schüler der Gruppe A dieser Klasse.

"BK11B" ist die Menge aller Schüler der Gruppe B dieser Klasse. "MESK" ist die Menge aller Schüler dieser Schule. Bestimmen Sie:

- 1) $"BK11A" \cup "BK11B" =$
- 2) $"BK11A" \cap "BK11B" =$
- 3) $"BK11A" \setminus "BK11B" =$
- 4) $"BK11B" \setminus "BK11A" =$
- 5) $"BK11" \setminus "BK11B" =$
- 6) $"BK11" \setminus "BK11A" =$
- 7) $"BK11A" \setminus "BK11" =$
- 8) $"BK11B" \setminus "BK11" =$
- 9) $"MESK" \cap "BK11A" =$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch ?

- 10) $"MESK" \subset "BK11"$
- 11) $"BK11A" \subset "BK11"$
- 12) $("BK11A" \cup "BK11B") \subset "BK11"$

IV)

(30P)

Bestimmen Sie die folgenden Mengen (keine Venn – Diagramme)

Wenn Menge in beschreibender Form angegeben wird, möglichst „einfache“ Form wählen.

Beispiel:

Statt

$$M = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 10 \vee x = 11 \vee x = 12 \vee x = 13 \vee x = 14 \vee x = 15\}$$

besser:

$$M = \{x \in \mathbb{N} \mid 10 \leq x \leq 15\}$$

1) Bestimmen Sie $A \cap B$

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 40\}, B = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 50\}$$

2) Bestimmen Sie $B \cap C$

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 5\}, C = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 10\}$$

3) Bestimmen Sie $B \cup C$

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid 74 < x < 77\}, C = \{x \in \mathbb{N} \mid 77 \leq x \leq 79\}$$

4) Bestimmen Sie $B \cup C$

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid 15 \leq x \leq 18\}, C = \{x \in \mathbb{N} \mid 17 < x \leq 19\}$$

5) Bestimmen Sie $A \setminus B$

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 4\}, B = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 < x < 7\}$$

6) Bestimmen Sie $B \setminus A$

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 4\}, B = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 < x < 7\}$$

7) Bestimmen Sie $A \cup B$

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leq x \leq 8\}, B = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 5\}$$

8) Bestimmen Sie $A \cup B$

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < -2\}, B = \{x \in \mathbb{R} \mid 5 < x \leq 9\}$$

9) Bestimmen Sie $E \cap F$

$$E = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}, F = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 2\}$$

10) Bestimmen Sie $E \cap F$

$$E = \{x \in \mathbb{R} \mid 4 < x < 7\}, F = \{x \in \mathbb{R} \mid 5 \leq x \leq 9\}$$

Lösungen:

I) (4P)

- 1) Ein sprachliches Gebilde heißt **Aussage**, wenn es entweder wahr (w) oder falsch (f) ist.
- 2) Ein sprachliches Gebilde heißt **Aussageform**, wenn es Variable (Leerstellen, Platzhalter) enthält und durch Einsetzung in eine Aussage übergeht. In Abhängigkeit von den Variablen schreibt man auch $A(x)$ bzw. $A(x,y)$, bzw. $A(x,y,z)$ usw.

II) (4P)

Sprachliches Gebilde	Eigenschaft
Außerhalb von Raum und Zeit.	mathematisch sinnlos
Alle ungeraden Zahlen sind Primzahlen	falsch
$\neg x \vee x$	mathematisch sinnlos
$x - 6 < 10$	Aussageform

III) (12P)

- 1) $"BKI1A" \cup "BKI1B" = "BKI1"$
- 2) $"BKI1A" \cap "BKI1B" = \emptyset$
- 3) $"BKI1A" \setminus "BKI1B" = "BKI1A"$
- 4) $"BKI1B" \setminus "BKI1A" = "BKI1B"$
- 5) $"BKI1" \setminus "BKI1B" = "BKI1A"$
- 6) $"BKI1" \setminus "BKI1A" = "BKI1B"$
- 7) $"BKI1A" \setminus "BKI1" = \emptyset$
- 8) $"BKI1B" \setminus "BKI1" = \emptyset$
- 9) $"MESK" \cap "BKI1A" = "BKI1A"$
- 10) $"MESK" \subset "BKI1"$ falsch
- 11) $"BKI1A" \subset "BKI1"$ wahr
- 12) $("BKI1A" \cup "BKI1B") \subset "BKI1"$ wahr

IV)

1) $A \cap B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \geq 51\}$

2) $B \cap C = \{10\}$

3) $B \cup C = \{x \in \mathbb{N} \mid 75 \leq x \leq 79\}$

4) $B \cup C = \{x \in \mathbb{N} \mid 15 \leq x \leq 19\}$

5) $A \setminus B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 2\}$, $B \setminus A = \{0; 1; 2\}$

6) $B \setminus A = \{5; 6\}$

7) $A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 8\}$

8) $A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < -2 \vee 5 < x \leq 9\}$

9) $E \cap F = \emptyset$

10) $E \cap F = \{x \in \mathbb{R} \mid 5 \leq x < 7\}$

Name, Vorname:

Hilfsmittel:
keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\set{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punktabzug !!!!

AUFGABEN

1) Geben Sie die Lösungsmenge der folgenden LGS an:

a) 6 P

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}$$

b) 5 P

$$\begin{array}{cccc} 1 & 8 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}$$

c) 13 P

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array}$$

d) 13 P

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 5 & 9 \end{array}$$

e) 13 P

$$\begin{array}{cccccc} 2 & 1 & 9 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 6 & 1 & 0 & 5 \\ 7 & 0 & 5 & 0 & 1 & 2 \end{array}$$

Bemerkung zur Aufgabe:

Wenn die Lösungsmenge aus unendlich vielen Elementen besteht, muß zusätzlich noch ein konkretes Element der Lösungsmenge angegeben werden (gibt jeweils 2 Punkte).

Bei der Auswahl eines konkreten Elements dürfen nicht alle frei wählbaren Parameter Null gesetzt werden.

Lösungen:

1)

$$a) L = \{(9; 8; 7)\}$$

$$b) L = \{\}$$

c)

$$x_1 = 3 - 2 \cdot x_2$$

$$L = \{(x_1; x_2) \mid x_1 = 3 - 2 \cdot x_2 \wedge x_2 \in \mathbb{R}\}$$

wähle: $x_2 = 1$, dann gilt:

$$x_1 = 3 - 2 \cdot 1 = 1$$

$$\text{also: } (1; 1) \in L$$

d)

$$x_1 = 7 - 4 \cdot x_3$$

$$x_2 = 9 - 5 \cdot x_3$$

$$L = \{(x_1; x_2; x_3) \mid x_1 = 7 - 4 \cdot x_3 \wedge x_2 = 9 - 5 \cdot x_3 \wedge x_3 \in \mathbb{R}\}$$

e)

$$x_2 = 4 - 9 \cdot x_3 - 2 \cdot x_1$$

$$x_4 = 5 - 6 \cdot x_3 - 4 \cdot x_1$$

$$x_5 = 2 - 5 \cdot x_3 - 7 \cdot x_1$$

$$L = \{(x_1; x_2; x_3; x_4; x_5) \mid x_2 = 4 - 9 \cdot x_3 - 2 \cdot x_1 \wedge x_4 = 5 - 6 \cdot x_3 - 4 \cdot x_1 \wedge x_5 = 2 - 5 \cdot x_3 - 7 \cdot x_1 \wedge x_1 \in \mathbb{R} \wedge x_3 \in \mathbb{R}\}$$

wähle: $x_1 = 1; x_3 = 1$, dann gilt:

$$x_2 = 4 - 9 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = -7$$

$$x_4 = 5 - 6 \cdot 1 - 4 \cdot 1 = -5$$

$$x_5 = 2 - 5 \cdot 1 - 7 \cdot 1 = -10$$

$$\text{also: } (1; -7; 1; -5; -10) \in L$$

*Name, Vorname:*Hilfsmittel:
keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punktabzug !!!!

AUFGABEN

1) Geben Sie die Lösungsmenge der folgenden LGS an: (18P)

a)	b)	c)	d)
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 8 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 9 \end{pmatrix}$	

2) Wie ist $|x|$ definiert ? (3 P)3) Geben Sie eine Äquivalenzumformung der folgenden Gleichung an: (3 P)
 $x^2 = 25$

4) Machen Sie die quadratische Ergänzung zum folgenden Term: (10P)

$$x^2 - \frac{7}{3}x + ? = (? - ?)^2$$

5) $\sqrt{z^2} =$ (3 P)6) Geben Sie die Lösungsmenge der folgenden Gleichung an: (3 P)
 $x^2 = -4$ 7) Bestimmen Sie die Lösung der folgenden Gleichung durch Äquivalenzumformungen (nicht durch "Mitternachtsformel") (10P)
 $(x - 1)^2 = 16$

Lösungen

1)

$$a) L = \{(9; 8; 7)\}$$

$$b) L = \{\}$$

c)

$$x_1 = 3 - 2 \cdot x_2$$

$$L = \{(x_1; x_2) \mid x_1 = 3 - 2 \cdot x_2 \wedge x_2 \in \mathbb{R}\}$$

wähle: $x_2 = 1$, dann gilt:

$$x_1 = 3 - 2 \cdot 1 = 1$$

$$\text{also: } (1; 1) \in L$$

d)

$$x_1 = 7 - 4 \cdot x_3$$

$$x_2 = 9 - 5 \cdot x_3$$

$$L = \{(x_1; x_2; x_3) \mid x_1 = 7 - 4 \cdot x_3 \wedge x_2 = 9 - 5 \cdot x_3 \wedge x_3 \in \mathbb{R}\}$$

2)

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

$$3) x^2 = 25 \iff x = 5 \vee x = -5$$

4)

$$x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{3} x + ? = x^2 - 2 \cdot \frac{7}{6} x + \left(\frac{7}{6}\right)^2 = \left(x - \frac{7}{6}\right)^2$$

$$5) \sqrt{z^2} = |z|$$

6)

$$L = \{\}$$

7)

$$(x - 1)^2 = 16 \iff (\text{Wurzelziehen auf beiden Seiten})$$

$$|x - 1| = \sqrt{16} = 4 \iff$$

$$x - 1 = 4 \vee x - 1 = -4 \iff$$

$$x = 5 \vee x = -3 \iff$$

also:

$$L = \{-3; 5\}$$

Name, Vorname:

Hilfsmittel:
keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punktabzug !!!!

AUFGABEN

Bemerkung:

Die Grundmenge aller folgenden Gleichung sind die reellen Zahlen.

1) (4 P)

Geben Sie ein LGS an, das unendlich viele Lösungen besitzt und aus 3 Unbekannten besteht.
Geben Sie die Lösungsmenge davon an!

2) (6 P)

Geben Sie die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen an

a) $x^2 = -4$ b) $x^2 = 0$ c) $|x| = -5$ d) $x^2 = 0,25$ e) $|x| = x$

3) (4 P)

Ziehen Sie auf allen Seiten der folgenden Gleichung die Wurzel und geben Sie dann die Lösungsmenge der folgenden Gleichung an:

$$(x - 6)^2 = 81$$

4) (3 P)

Machen Sie die quadratische Ergänzung zum folgenden Term:

$$x^2 - \frac{7}{4\pi}x + ? = (? - ?)^2$$

5) (3 P)

Geben Sie die Definitionsmenge und die Lösungsmenge der folgenden Gleichung an:

$$(x-1)^2 \cdot (x+2) \cdot (x-5) = 0$$

6)

(9 P)

Formen Sie die Terme in einfachere Terme um (daß sich allgemeingültige Gleichungen ergeben) (jeweils 6 P)

$$\text{a) } \frac{\frac{a}{b} + 1}{\frac{b}{a} + 1}$$

$$\text{b) } \frac{\frac{x^2}{2y} - \frac{y^2}{2x}}{\frac{2}{x} - \frac{2}{y}}$$

7)

(22 P)

Geben Sie jeweils die Definitionsmenge und die Lösungsmenge an.

$$\text{a) } \frac{9}{x+3} - \frac{x}{x-3} = 2 - \frac{3}{x-3} - \frac{3x}{x+3}$$

$$\text{b) } \frac{x}{2x-3} - \frac{1}{2x} = \frac{3}{4x-6}$$

$$\text{c) } \frac{9+2x}{9-x^2} = \frac{5}{3-x} - \frac{4+x}{6+2x}$$

Lösungen:

1)

2)

$$x^2 = -4 \quad L = \{\}$$

$$x^2 = 0 \quad L = \{0\}$$

$$|x| = -5 \quad L = \{\}$$

$$x^2 = 0,25 \quad L = \{0,5; -0,5\}$$

$$|x| = x \quad L = \text{Menge aller positiven reellen Zahlen, einschließlich der } 0$$

3)

$$(x - 6)^2 = 81 \quad | \text{ Wurzel auf beiden Seiten}$$

$$|x - 6| = 9$$

$$x - 6 = 15 \quad \vee \quad x - 6 = -9$$

$$x = 11 \quad \vee \quad x = -3$$

$$L = \{-3; 11\}$$

4)

$$x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{4\pi} x = x^2 - 2 \cdot \frac{7}{8\pi} x, \text{ also:}$$

$$x^2 - \frac{7}{4\pi} x + \left(\frac{7}{8\pi}\right)^2 = \left(x - \frac{7}{8\pi}\right)^2$$

5)

$$D = \mathbb{R} \quad L = \{1; -2; 5\}$$

6)

$$\text{a) } \frac{\frac{a}{b} + 1}{\frac{b}{a} + 1} = \frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{b}}{\frac{b}{a} + \frac{a}{a}} = \frac{\frac{a+b}{b}}{\frac{b+a}{a}} = \frac{(a+b)a}{b(a+b)} = \frac{a}{b}$$

$$\text{b) } \frac{\frac{x^2}{2y} - \frac{y^2}{2x}}{\frac{2}{x} - \frac{2}{y}} = \frac{\frac{x^2}{2xy} - \frac{y^2}{2xy}}{\frac{2y}{2y} - \frac{2x}{2y}} = \frac{\frac{x^3 - y^3}{2xy}}{\frac{2y - 2x}{2y}} = \frac{\frac{x^3 - y^3}{2xy}}{\frac{2y - 2x}{xy}} = \frac{(x^3 - y^3)xy}{2xy(2y - 2x)} = \frac{x^3 - y^3}{4(y - x)}$$

7)

a)

$$\frac{9}{x+3} - \frac{x}{x-3} = 2 - \frac{3}{x-3} - \frac{3x}{x+3} \quad | \cdot (x+3)(x-3)$$

$$D = R \setminus \{-3; 3\}$$

$$9(x-3) - x(x+3) = 2(x-3)(x+3) - 3(x+3) - 3x(x-3)$$

$$9x - 27 - x^2 - 3x = 2x^2 - 18 - 3x - 9 - 3x^2 + 9x$$

$$-x^2 + 6x - 27 = -x^2 + 6x - 27$$

$$L = R \setminus \{-3; 3\}$$

b)

$$\frac{x}{2x-3} - \frac{1}{2x} = \frac{3}{4x-6} \quad | \cdot HN = 2x(2x-3)$$

$$D = R \setminus \left\{0; \frac{3}{2}\right\}$$

$$2x^2 - (2x-3) = 3x$$

$$2x^2 - 2x + 3 = 3x$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{4} = \frac{5 \pm 1}{4}$$

$$x_1 = \frac{3}{2} \quad x_2 = 1$$

$$L = \{1\}$$

c)

$$\frac{9+2x}{9-x^2} = \frac{5}{3-x} - \frac{4+x}{6+2x} \quad | \cdot HN = 2(3-x)(3+x)$$

$$D = R \setminus \{3; -3\}$$

$$2(9+2x) = 10(3+x) - (4+x)(3-x)$$

$$18+4x = 30+10x - (12+3x-4x-x^2)$$

$$18+4x = 30+10x-12+x+x^2$$

$$-x^2-7x=0$$

$$-x(x+7)=0$$

$$x=0 \vee x=-7$$

$$L = \{0; -7\}$$

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punktabzug !!!!

AUFGABEN

1)

23P

Bemerkungen zur folgenden Aufgabe:

Wenn die Lösungsmenge aus unendlich vielen Elementen besteht, muß zusätzlich noch ein konkretes Element der Lösungsmenge angegeben werden.

Berechnen (oder direkt ablesen) Sie die Lösungsmenge folgender linearer Gleichungssysteme mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus.

a)

$$\begin{array}{cccc} 2 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{ccc} 1 & -2 & 3 \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \end{array}$$

d)

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \end{array}$$

2)

27P

gegeben:

Geraden K_{f1} und K_{f2} mit den zugehörigen Funktionsgleichungen

$$f_1(x) = -\frac{3}{4}x + 2$$

$$f_2(x) = \frac{2}{5}x - 2$$

gesucht: (zeichnerische und rechnerische Lösung !)

Der Schnittpunkt S von K_{f1} und K_{f2} Zeichnen Sie die Geraden K_{f1} und K_{f2} in ein rechtwinkliges Koordinatensystem(x-Achse: $[-1; 4]$, y-Achse: $[-4; 4]$, LE = 1 cm)

Lösung:

1)

a)

$$\begin{array}{cccc} 2 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{array}$$

3P

b)

$$\begin{array}{ccc} 1 & -2 & 3 \end{array}$$

6P

c)

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \end{array}$$

7P

d)

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \end{array}$$

7P

a) $L = \{ \}$

b)

$$x_1 = 3 + 2 \cdot x_2$$

$$L = \{ (x_1; x_2) \mid x_1 = 3 + 2 \cdot x_2 \wedge x_2 \in \mathbb{R} \}$$

wähle: $x_2 = 1$, dann gilt:

$$x_1 = 3 + 2 \cdot 1 = 5$$

also: $(5; 1) \in L$

c)

$$x_1 = 4 + 2 \cdot x_3$$

$$x_2 = 5 + 3 \cdot x_3$$

$$L = \{ (x_1; x_2; x_3) \mid x_1 = 4 + 2 \cdot x_3 \wedge x_2 = 5 + 3 \cdot x_3 \wedge x_3 \in \mathbb{R} \}$$

wähle: $x_3 = 1$, dann gilt:

$$x_1 = 4 + 2 \cdot 1 = 6$$

$$x_2 = 5 + 3 \cdot 1 = 8$$

also: $(6; 8; 1) \in L$

d)

x_1	x_2	b	Op	KS
1	2	3	G1	6
-1	-2	-3	G2	-6
1	2	3	G3	6
1	2	3	G4=G1	6
0	0	0	G5=G1+G2	0
0	0	0	G6=G1-G3	0
1	2	3	G7	6

$$x_1 = 3 - 2 \cdot x_2$$

$$L = \{ (x_1; x_2) \mid x_1 = 3 - 2 \cdot x_2 \wedge x_2 \in \mathbb{R} \}$$

wähle: $x_2 = 1$, dann gilt:

$$x_1 = 3 - 2 \cdot 1 = 1$$

also: $(1; 1) \in L$

2)

$$f_1(x) = -\frac{3}{4}x + 2$$

$$f_2(x) = \frac{2}{5}x - 2$$

Der Schnittpunkt sei $S(x_s|y_s)$. Für diesen gilt:

$S(x_s|y_s) \in K_{f1}$ und $S(x_s|y_s) \in K_{f2}$. Damit ist die Punktprobe erfüllt:

$$y_s = -\frac{3}{4}x_s + 2$$

$$y_s = \frac{2}{5}x_s - 2$$

also:

$$-\frac{3}{4}x_s + 2 = \frac{2}{5}x_s - 2 \iff \frac{2}{5}x_s + \frac{3}{4}x_s = 4 \iff 7P$$

$$8x_s + 15x_s = 80 \iff 23x_s = 80 \iff x_s = \frac{80}{23} \quad 7P$$

$$y_s = -\frac{3}{4} \cdot \frac{80}{23} + 2 = -\frac{60}{23} + 2 = -\frac{14}{23}$$

und damit:

$$x_s = \frac{80}{23}$$

$$y_s = -\frac{14}{23} \quad 3P$$

also:

$$S\left(\frac{80}{23} \mid -\frac{14}{23}\right) \approx S(3,5 \mid 0,6) \quad 1P$$

Zeichnung: 9P

Name, Vorname:

Hilfsmittel:
keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punktabzug !!!!

AUFGABEN

1) 4P

Was muss für einen Punkt $P(x|y)$ in einem rechtwinkligen Koordinatensystem gelten, damit er:

- a) links von der y-Achse liegt ?
- b) sich im 4. Quadranten befindet ?

2) 8P

Vervollständigen Sie den Lückentext !

Eine _____ ist eine Zuordnung, die jedem Element aus der _____ menge
_____ Element aus der _____ menge zuordnet.

3) 6P

Welche 3 Möglichkeiten gibt es, eine Funktion darzustellen?

4) 4P

Zeichnen Sie ein Schaubild an, das nicht zu einer Funktion gehört.

5) 9P

Gegeben ist die Funktion g mit der Funktionsgleichung

$$g(x) = (\sin(x) + \pi)^2 - \sqrt{x}$$

Berechnen Sie (nur Term angeben, nicht vereinfachen):

- a) $g(2x)$
- b) $g(x + 2)$
- c) $g(x^2 - \pi)$

6) 6P

Geben Sie die größtmögliche Definitionsmenge D und den Wertebereich W der folgenden Funktion h an:

$$h(x) = \frac{1}{x}$$

7) 4P
Eine Parallele zur y-Achse geht durch den Punkt $P(3 \mid 1)$.
Wie heißt die Gleichung dieser Geraden?

8) 4P
Wie heißt die Funktionsgleichung der Geraden, die identisch ist mit der x-Achse?

9) 6P
Gegeben sind die folgenden 2 Funktionen:
 $f(x) = 2x+5$
 $h(x) = -6x+7$

gesucht:
Der Schnittpunkt von K_f und K_h

WICHTIG:

Nur den Ansatz machen (nicht den Schnittpunkt vollständig berechnen).
Begründung (auch Worte benutzen) wie im Unterricht !

Lösung:

Lösungen:

1) 4P

a) $x < 0$

b) $x > 0$ und $y < 0$

2) 8P

Vervollständigen Sie den Lückentext !

Eine Funktion ist eine Zuordnung, die jedem Element aus der Definitionsmenge genau ein Element aus der Wertemenge zuordnet.

3) 6P

Funktionsgleichung, Wertetabelle, Paarmenge, Schaubild

4) 4P

z.B: Kreis

5) 9P

$$g(x) = (\sin(x) + \pi)^2 - \sqrt{x}$$

$$g(2x) = (\sin(2x) + \pi)^2 - \sqrt{2x}$$

$$g(x+2) = (\sin(x+2) + \pi)^2 - \sqrt{x+2}$$

$$g(x^2 - \pi) = (\sin(x^2 - \pi) + \pi)^2 - \sqrt{x^2 - \pi}$$

6) 6P

$$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$W = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

7) 4P

$$x = 3$$

8) 4P

$$y = 0$$

9) 6P

Der Schnittpunkt sei $S(x_s|y_s)$. Für diesen gilt:

$$S(x_s|y_s) \in K_f \quad \text{und} \quad S(x_s|y_s) \in K_h.$$

Damit ist die Punktprobe erfüllt:

$$y_s = 2 x_s + 5$$

$$y_s = -6 x_s + 7$$

also:

$$2 x_s + 5 = -6 x_s + 7$$

Name, Vorname:

Hilfsmittel:
keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punktabzug !!!!

AUFGABEN

- 1) Geben Sie die Definitionen folgender Begriffe an: 4P
a) Funktion,
b) Punktprobe
- 2) Geben Sie ein Schaubild an, das nicht zu einer Funktion gehört. 1P
- 3) Geben Sie die größtmögliche Definitionsmenge D der folgenden Funktion h an: 1P
$$h(x) = \frac{1}{x-10}$$
- 4) Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^2+2x+3$ 6P
Bestimmen Sie
 $f(x^2)$, $f(2x)$, $f(x+1)$
Der sich ergebende Term muss nicht vereinfacht werden!!
- 5) Welche 3 Möglichkeiten gibt es, eine Funktion darzustellen? 3P
- 6) Eine Parallele zur y-Achse geht durch den Punkt $P(3 \mid 1)$. 2P
Wie heißt die Gleichung dieser Geraden?
- 7) Wie heißt die Funktionsgleichung der Geraden, die identisch ist mit der x-Achse? 1P
- 8) Geben Sie die Formeln der folgenden Begriffe an:
a) Punkt-Steigungs-Form der Geradengleichung 1P
b) Zwei-Punkte- Form der Geradengleichung 1P

Lösungen:

1)a) Eine Funktion f ist eine Menge von geordneten Zahlenpaaren (x,y) .

Dabei wird jedem Element $x \in D$ (Definitionsmenge) genau ein Element $y \in Z$ (Zielmenge) zugeordnet. Das zugeordnete Element y wird auch mit $f(x)$ bezeichnet.

b) Gegeben ist eine Funktion f .

Liegt ein Punkt $P(x_p | y_p)$ auf dem Graphen K_f , so erfüllen seine Koordinaten x_p und y_p die Funktionsgleichung $y = f(x)$.

Also gilt:

$$y_p = f(x_p)$$

$$2) y^2 = x^2$$

$$3) D = \mathbb{R} \setminus \{10\}$$

4)

$$f(x^2) = (x^2)^2 + 2(x^2) + 3$$

$$f(2x) = (2x)^2 + 2(2x) + 3$$

$$f(x+1) = (x+1)^2 + 2(x+1) + 3$$

5) Funktionsgleichung, Wertetabelle, Paarmenge, Schaubild

$$6) x = 3$$

$$7) y = 0$$

8)

$$a) \frac{y - y_0}{x - x_0} = m$$

$$b) \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\set{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

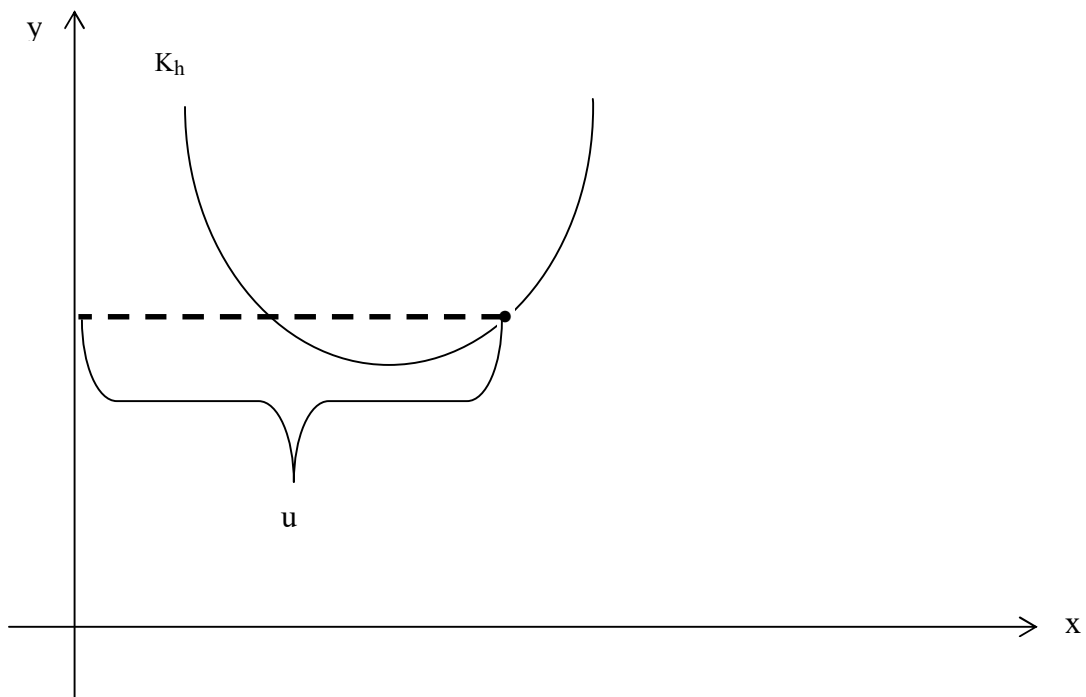
AUFGABEN

1)

6P

Gegeben sei eine Funktion h (mit dem Schaubild K_h).

Herr W.B. Gierig will wissen, wie groß $h(u)$ und $h'(u)$ ist. Zeichnen Sie deshalb $h(u)$ und $h'(u)$ in die folgende Zeichnung ein, so dass Herr W.B. Gierig diese Werte mit dem Geodreieck ablesen kann.



BITTE beachten Sie auch die Rückseite dieses zweiseitigen Blattes.

Vielen Dank !!!!!

2)

10P

Bilden Sie (rein rechnerisch, ohne geometrische Begründung) von der folgenden Funktion h mit Hilfe der Limesbildung die Ableitung:

$$h(x) = -4 \cdot x^2 + 2$$

3)

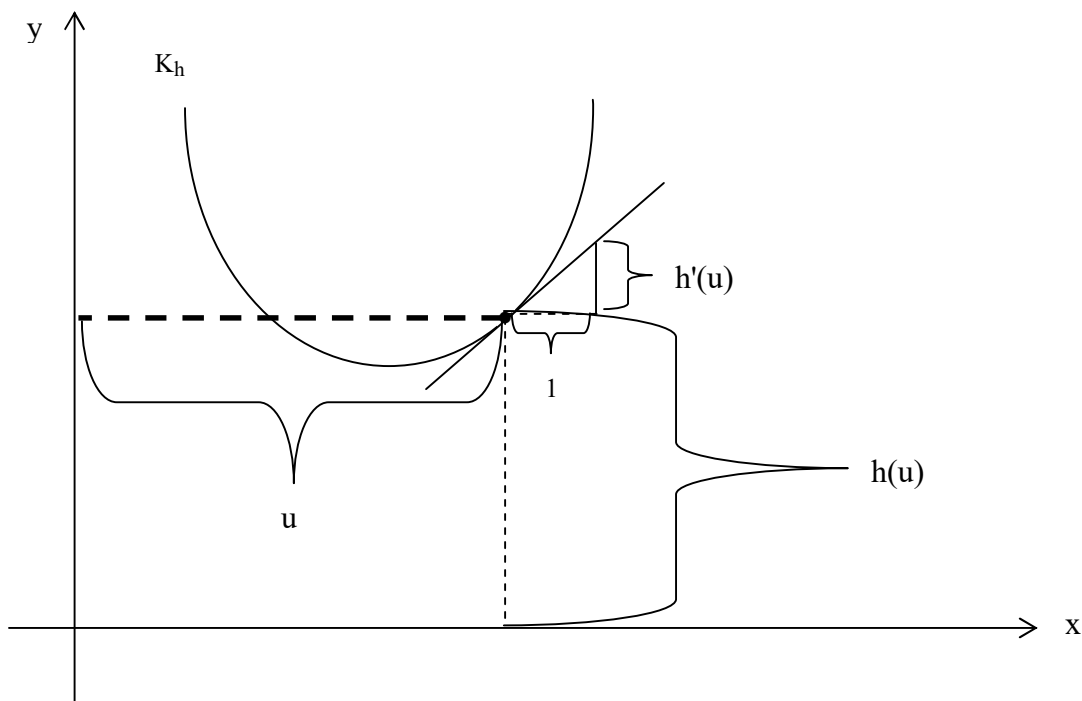
4P

a) Wie heißt die Ableitung der Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$?

b) Geben Sie mit Hilfe von a) die Ableitung der Funktion $h(x) = -4 \cdot x^2 + 2$ an

Lösungen:

1)



2)

$$\begin{aligned}
 h'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-4(x + \Delta x)^2 + 2 - (-4x^2 + 2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-4x^2 - 8x\Delta x - 4\Delta x^2 + 2 + 4x^2 - 2}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-8x\Delta x - 4\Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(-8x - 4\Delta x)}{\Delta x} \quad (da \ \Delta x \neq 0) \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} -8x - 4\Delta x = -8x \\
 \text{Damit: } h'(x) &= -8x
 \end{aligned}$$

3)

a) $f'(x) = 2ax + b$

b) $a = -4$ und $b = 0$ und $c = 2$

$h'(x) = 2 \cdot (-4) \cdot x + 0 = -8x$

Name, Vorname:

Hilfsmittel:
keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punktabzug !!!!

AUFGABEN

1) Wie ist rein formal (mit Hilfe des Limes) die Ableitung $h'(x)$ definiert ? 2P

2) Gegeben ist die Funktion g mit der Funktionsgleichung 2P

$$g(x) = (\sin(x) + \pi)^2 - \sqrt{x}$$

Berechnen Sie (nur Term angeben, nicht vereinfachen):

$$g(x^2 + \pi)$$

3) Geben Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen an: 14P
(c, k sind **konstante** Werte)

a) $h_1(x) = g(x) + c$

b) $h_2(x) = k \cdot g(x)$

c) $h_3(x) = g(x) + h(x)$

d) $h_4(x) = 10 \cdot 5$

e) $h_5(x) = 3 \cdot x^7 + 10$

f) $h_6(x) = x$

g) $h_7(x) = k/c$

4) In welchen Punkten hat das Schaubild K_g der Funktion g mit der Funktionsgleichung $g(x) = x^3$ 2P

eine negative Steigung.

Zeichnerische und rechnerische Begründung!

Lösungen:

1)

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x}$$

2)

$$g(x^2 + \pi) = (\sin(x^2 + \pi) + \pi)^2 - \sqrt{x^2 + \pi}$$

3)

a) $h_1'(x) = g'(x)$

b) $h_2'(x) = k \cdot g'(x)$

c) $h_3'(x) = g'(x) + h'(x)$

d) $h_4'(x) = 0$

e) $h_5'(x) = 21 \cdot x^6$

f) $h_6'(x) = 1$

g) $h_7'(x) = 0$

4)

a) $g'(x) = 3x^2 \geq 0$, da $x^2 \geq 0$

b) Alle Tangenten haben positive Steigung

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punktabzug !!!!

Bemerkungen:

Bei der Berechnung der Ableitungen in den folgenden Aufgaben muß nicht der „Limes“ verwendet werden.

AUFGABEN

1) 4P

In welchen Punkten hat das Schaubild K_g der Funktion g mit der Funktionsgleichung $g(x) = x^2$ eine negative Steigung.
Zeichnerische (anschauliche) und rechnerische Begründung!

2) 10P

a) Berechnen Sie die Steigung der Kurve K_f mit der Funktionsgleichung $f(x) = 4x^5 - x + 8$ im Punkt $P(0 | ?)$
b) Was bedeutet das anschaulich?
c) Geben Sie Gleichung der Tangenten im Punkt $P(0 | ?)$ an.

3) 12P
Berechnen (mit Hilfe der Ableitung) Sie den Scheitel der Parabel mit der Funktionsgleichung:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 - x - 2$$

4) 12P

In welchen Punkten hat das Schaubild der Funktionsgleichung $f(x) = x^3$ die Steigung 27 ?

Bitte beachten Sie, daß dieses Blatt eine Rückseite besitzt!

5)

4P

Bestimmen Sie die Ableitung von

$$h(x) = (3x - 4)^7$$

6)

8P

Begründen Sie mathematisch, warum

a) $g(x) = 2x^5 - 3x^3 + x$ punktsymmetrisch zu $O(0|0)$ ist

b) $h(x) = 2x^4 - 5x^2 - x$ nicht achsensymmetrisch zur y-Achse ist

Weiter Bemerkung:

Bitte ausführliche, nachvollziehbare Darstellung (siehe Unterricht bzw. Musterlösung).

Saubere, exakte Bezeichnungen, keine Syntaxfehler !!!!

Lösungen:

1) a) $g'(x) = 2x \leq 0 \implies x \leq 0$

b) Alle Tangenten im 2. Quadranten haben negative Steigung

2)

$$f(x) = 4x^5 - x + 8$$

$$a) f'(x) = 20x^4 - 1$$

$$f'(0) = 20 \cdot 0^4 - 1 = -1$$

b) Steigung der Tangente

$$c) f(0) = 8 \implies P(0 | 8)$$

$$\frac{y-8}{x-0} = -1 \implies y = -x + 8$$

3)

Der Scheitel sei $S(x_s | y_s)$.

a) Berechnung des x-Koordinatenwerts des Punkts:

$$f'(x) = \frac{1}{2}x - 1$$

Für den Scheitel $S(x_s | y_s)$ gilt:

$$0 = f'(x_s) = \frac{1}{2}x_s - 1$$

$$0 = \frac{1}{2}x_s - 1$$

also:

$$x_s = 2$$

b) Berechnung der y-Koordinate des Punkts:

$$y_s = f(2) = \frac{1}{4} \cdot 2^2 - 2 - 2 = -3$$

damit:

$$S(2 | -3)$$

4)

a)

$$f(x) = x^3$$

$$f'(x) = 3x^2$$

Der gesuchte Punkt sei $P(x_u | y_u)$.

a) Berechnung des x-Koordinatenwerts des Punkts:

Er hat die Steigung 27. Also gilt:

$$f'(x_u) = 27 = 3x_u^2$$

$$x_u^2 = 9$$

$$x_{u1} = 3; \quad x_{u2} = -3$$

b) Berechnung der y-Koordinate der Punkte:

$$y_{u1} = f(3) = 3^3 = 27$$

$$y_{u2} = f(-3) = (-3)^3 = -27$$

also:

$$P_1(3 | 27), \quad P_2(-3 | -27)$$

5)

Bestimmen Sie die Ableitung von

$$h(x) = (3x - 4)^7$$

$$\text{Setze } u = 3x - 4$$

$$h(u) = u^7$$

$$h(x) = 7u^6 \cdot u' = 7(3x - 4)^6 \cdot 3 = 21(3x - 4)^6$$

6)

$$a) g(x) = 2x^5 - 3x^3 + x$$

$$g(-x) = 2(-x)^5 - 3(-x)^3 + (-x) = -2x^5 + 3x^3 - x$$

$$-g(-x) = 2x^5 - 3x^3 + x = g(x)$$

also punktsymmetrisch zu $O(0|0)$

b)

$$h(x) = 2x^4 - 5x^2 - x$$

$$h(-x) = 2(-x)^4 - 5(-x)^2 - (-x) = 2x^4 - 5x^2 + x \neq h(x)$$

also nicht achsensymmetrisch zur y-Achse

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

Taschenrechner

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

Bemerkungen:

- 1) Bei der Berechnung der Ableitungen in den folgenden Aufgaben muß nicht der „Limes“ verwendet werden.
- 2) Begründung und Argumentation bei allen Aufgaben wie im Unterricht!!
- 3) Ergebnisse exakt **und** gerundet (auf 1 Stelle hinter dem Komma) angeben!

AUFGABEN

1) 50P

Zeichnen Sie das Schaubild der folgenden Funktion, in jeweils dem Bereich, in dem die interessanten Punkte (Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Extrempunkte, Wendepunkte) vorkommen. Untersuchen Sie die Schaubilder jeweils bzgl:

- a) Symmetrie (Begründung!)
- b) Achsenschnittpunkte
- c) die ersten 3 Ableitungen
- d) Extrempunkte
- e) Wendepunkte und Wendetangenten

$$f(x) = \frac{1}{5}x^4 - 5$$

Lösungen

$$1) f(x) = \frac{1}{5}x^4 - 5$$

a) Symmetrie (6P)

$$a1) f(-x) = \frac{1}{5}(-x)^4 - 5 = \frac{1}{5}x^4 - 5 = f(x)$$

Das Schaubild K_f ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

3P

andere Begründung: In dem Polynom kommen nur gerade Hochzahlen vor.

$$a2) -f(-x) = -(\frac{1}{5}(-x)^4 - 5) = -\frac{1}{5}x^4 + 5 \neq f(x)$$

Das Schaubild K_f ist nicht punktsymmetrisch bzgl. $O(0 | 0)$.

3P

andere Begründung: In dem Polynom kommen nicht ausschließlich ungerade Hochzahlen vor.

b) Achsenschnittpunkte (12P)

b1) Schnittpunkte $S_y(0 | y_s)$ mit der y-Achse: $S_y(0 | y_s) \in K_f$

2P

$$y_s = f(0)$$

1P

$$= \frac{1}{5} \cdot 0^4 - 5 = -5$$

1P

$$S_y(0 | -5)$$

1P

b2) Schnittpunkte $S_x(x_s | 0)$ mit der x-Achse: $S_x(x_s | 0) \in K_f$

2P

$$0 = \frac{1}{5}x_s^4 - 5 \quad | \cdot 5$$

1P

$$0 = x_s^4 - 25 \iff x_s^4 = 25 \iff \sqrt{(x_s^2)^2} = 25 \quad | \sqrt{}$$

2P

$$|x_s^2| = 5 \iff x_s^2 = 5$$

$$x_{s1} = \sqrt{5}$$

$$x_{s2} = -\sqrt{5}$$

damit Nullstellen von f:

2P

$$S_{x1}(-\sqrt{5} | 0) \approx S_{x1}(-2,24 | 0)$$

$$S_{x2}(\sqrt{5} | 0) \approx S_{x2}(2,24 | 0)$$

c) Ableitungen (3P)

3P

$$f(x) = \frac{1}{5}x^4 - 5$$

$$f'(x) = \frac{4}{5}x^3$$

$$f''(x) = \frac{12}{5}x^2$$

$$f'''(x) = \frac{24}{5}x$$

d) Extrempunkte (14P)

Extrempunkte $E(x_e | y_e)$: $f'(x_e) = 0$

2P

$$0 = \frac{4}{5}x_e^3 \quad | : \frac{4}{5}$$

2P

$$x_e^3 = 0$$

$$x_{el} = 0 \quad 2P$$

$$f''(0) = \frac{12}{5} \cdot 0^2 = 0 \implies \text{keine Aussage möglich.} \quad 3P$$

aber: VZW bei $f'(0)$ von - nach + \implies Tiefpunkt 3P

$$y_{el} = f(0) = \frac{1}{5} \cdot 0^4 - 5 = -5 \quad 1P$$

damit:

T(0 | -5) Tiefpunkt 1P

e) Wendepunkte **(13P)**

Wendepunkte $W(x_w | y_w)$: $f''(x_w) = 0$ 2P

$$\frac{12}{5} x_w^2 = 0 \quad | : \frac{12}{5} \quad 2P$$

$$x_w^2 = 0$$

$$x_w = 0 \quad 2P$$

$$f'''(0) = \frac{24}{5} \cdot 0 = 0 \implies \text{keine Aussage möglich.} \quad 3P$$

aber: kein VZW bei $f''(0)$ \implies kein Wendepunkt 3P

damit:

keine Wendepunkte

f) Wendetangenten

1P

Da es keine Wendepunkte gibt, gibt es auch keine Wendetangenten.

Zeichnung:

3P

KLAUSUR 4 Mathematik 2BKI1 Nachtermin Zeit: 45 Minuten

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punktabzug !!!!

AUFGABEN

1) 36P
Eine bzgl. $O(0 | 0)$ punktsymmetrische Parabel 5. Ordnung hat in $P(-1 | 1)$ eine Wendetangente mit der Steigung 3. Wie heißt die Funktionsgleichung der Parabel ?

2) 14P
Gegeben ist die Funktion f mit der Funktionsgleichung:

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 2x$$

- a) Berechnen Sie $f(2)$
- b) Begründen Sie mathematisch, warum K_f punktsymmetrisch bzgl. $O(0|0)$ ist.
- c) Berechnen Sie die tatsächliche Fläche zwischen K_f und der x -Achse.
- d) Welche Wert hat die bilanzierte Fläche zwischen K_f und der x -Achse.
Begründen (nicht rechnen) Sie!

Bemerkungen:

- 1) Begründung und Argumentation bei allen Aufgaben wie im Unterricht!!
- 2) Ergebnisse exakt und gerundet angeben!

Lösungen

1)

$$f(x) = ax^5 + bx^3 + cx$$

$$f'(x) = 5ax^4 + 3bx^2 + c$$

4P

$$f''(x) = 20ax^3 + 6bx$$

a) $P(-1 | 1) \in K_f$

8P

$$1 = a \cdot (-1)^5 + b \cdot (-1)^3 + c \cdot (-1)$$

$$1 = -a - b - c \quad (G1)$$

b) $P(-1 | 1)$ ist Wendepunkt

8P

$$f''(-1) = 0$$

$$20a \cdot (-1)^3 + 6b(-1) = 0$$

$$-20a - 6b = 0$$

$$-10a - 3b = 0 \quad (G2)$$

c) Wendetangente in $P(-1 | 1)$ hat die Steigung 3

8P

$$f'(-1) = 3$$

$$5a \cdot (-1)^4 + 3b \cdot (-1)^2 + c = 3$$

$$5a + 3b + c = 3 \quad (G3)$$

d) Mit TR (Taschenrechner), Additionsverfahren oder Gaußscher Algorithmus folgt aus (G1), (G2) und (G3):

8P

$$a = -\frac{3}{2}, \quad b = 5, \quad c = -\frac{9}{2}$$

e) Ergebnis:

$$f(x) = -\frac{3}{2}x^5 + 5x^3 - \frac{9}{2}x$$

2)

$$a) f(2) = -\frac{1}{2} \cdot 2^3 + 2 \cdot 2 = 0$$

$$b) -f(-x) = -\left(-\frac{1}{2} \cdot (-x)^3 + 2 \cdot (-x)\right) = -\frac{1}{2} \cdot x^3 + 2x = f(x)$$

Da K_f punktsymmetrisch ist und laut a) $f(2) = 0$ ist, gilt auch:

$$f(-2) = -f(-(-2)) = -f(2) = -0 = 0 \text{ und auch } f(0) = 0$$

$$c) I = \int_{-2}^0 f(x) dx = \int_{-2}^0 \left(-\frac{1}{2} \cdot x^3 + 2x\right) dx = \left[-\frac{x^4}{8} + x^2\right]_{-2}^0 = -\frac{0^4}{8} + 0^2 - \left(-\frac{(-2)^4}{8} + (-2)^2\right) = -2$$

Da K_f punktsymmetrisch ist, gilt:

$$A = 2 \cdot |I| = 4$$

d) Die bilanzierte Fläche ist 0, da K_f punktsymmetrisch bzgl. $O(0 | 0)$ ist und damit der Teil unter der Kurve auf der negativen x-Achse deckungsgleich ist mit dem Teil unter der Kurve auf der positiven x-Achse.

Kurztest 4 Mathematik 1 2BKI1 29.3.2012 Zeit: 15 Minuten

Name, Vorname:

Hilfsmittel:
keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punkteabzug !!!!

Bemerkung:

Taschenrechner dürfen nicht verwendet werden!!!

AUFGABEN

1) Lösen Sie die Gleichung $r^x = s$ (wobei $r > 0$, $r \neq 1$, $s > 0$) auf nach:

- | | |
|--------|----|
| a) x | 1P |
| b) r | 1P |

2) Berechnen Sie:

- | | |
|--------------|----|
| a) $\ln e^7$ | 1P |
| b) $\ln 1$ | 1P |
| c) $\ln e$ | 1P |

3) Formen Sie in möglichst einfache Terme um (falls dies nicht möglich ist, schreiben sie "keine Umformung möglich"):

- | | |
|------------------------------------|----|
| a) $\log_{10}(a \cdot a)$ | 2P |
| b) $\ln(x - y)$ | 2P |
| c) $\ln\left(\frac{1}{e^2}\right)$ | 2P |
| d) $\log_a 1$ | 1P |
| e) $\log_a a$ | 1P |
| f) $\log_a a^x$ | 2P |
| g) $\log_a ((a^n)^m)$ | 3P |
| h) $\log_a \frac{a^n}{a^m}$ | 3P |

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punktabzug !!!!

Bemerkung:

Taschenrechner dürfen nicht verwendet werden!!!

AUFGABEN

1) 6P

Berechnen Sie:

a) $\ln e^7$

b) $\ln 1$

c) $\ln e$

2) 10P

Vom Ursprung $O(0 | 0)$ wird die Tangente an das Schaubild der Funktion mit der Funktionsgleichung $h(x) = e^x$ gelegt.

Berechnen Sie die Steigung der Tangente.

3) 6P

Leiten Sie die folgende Funktion ab:

$f(x) = 2 + 3x + 4e^{5x+6}$

4) 6P

Berechnen Sie:

$\int (2 + 3x + 4e^{5x+6}) dx$

5) 12P

Skizzieren Sie die Schaubilder der folgenden Funktionen in genau einem Koordinatensystem:

a) $f(x) = e^x$

b) $h_1(x) = e^{2x}$

c) $h_2(x) = e^{0,5x}$

d) $h_3(x) = e^{-2x}$

e) $h_4(x) = e^{-0,5x}$

f) $h_5(x) = \ln e$

6) 10P

Beweisen Sie mit Hilfe von Potenzgesetzen:

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

Lösungen:

1) Berechnen Sie:

a) $\ln e^7 = 7$

b) $\ln 1 = 0$

c) $\ln e = 1$

2) Der gesuchte Berührungspunkt sei $B(x_B, y_B)$.

Die ZPF der Geradengleichung ergibt die sogenannte Tangentenbedingung:

$$\frac{h(x_B) - 0}{x_B - 0} = h'(x_B) \quad (\text{TB})$$

Es gilt aber:

$$h(x_B) = x_B \text{ und } h'(x_B) = e^{x_B}$$

Setze dies in (TB) ein. Das ergibt dann:

$$\frac{e^{x_B} - 0}{x_B - 0} = e^{x_B}$$

$$\frac{e^{x_B}}{x_B} = e^{x_B} \iff \frac{1}{x_B} = 1 \iff x_B = 1$$

$$x_B = 1 \text{ und } y_B = h(1) = e^1 = e$$

also: $B(1 | e)$, also beträgt die Steigung $e/1 = e$

3) Leiten Sie die folgende Funktion ab:

$$f(x) = 2 + 3x + 4e^{5x+6}$$

$$f'(x) = 3 + 20e^{5x+6}$$

4) Berechnen Sie:

$$\int (2 + 3x + 4e^{5x+6}) dx = 2x + 1,5x^2 + 0,8e^{5x+6}$$

5) Skizzieren Sie die Schaubilder der folgenden Funktionen in genau einem Koordinatensystem:

a) $f(x) = e^x$

b) $h_1(x) = e^{2x}$

c) $h_2(x) = e^{0,5x}$

d) $h_3(x) = e^{-2x}$

e) $h_4(x) = e^{-0,5x}$

f) $h_5(x) = \ln e$

6) Beweisen Sie mit Hilfe von Potenzgesetzen:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^1} \cdot \sqrt[n]{b^1} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{(ab)^1} = \sqrt[n]{ab}$$

Kurztest 5 Mathematik 1 2BKI1 Nachtermin Zeit: 15 Minuten

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punktabzug !!!!

AUFGABEN

Bestimmen Sie die Definitionsmenge und die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen :

1) $\log_2(x-3) - \log_2(x^2-9) + 2 = 0$

2) $2,5 \cdot 2^{4x-4} \cdot 5^{x+2} = 2^{2x+1} \cdot 5^{3x-3}$

Vereinfachen Sie:

3) $\log_p \sqrt{\frac{4a^3 \cdot \sqrt{p}}{b^5 \cdot q^7}}$

Lösungen:

$$1) \log_2(x-3) - \log_2(x^2-9) + 2 = 0 \quad D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\} \Leftrightarrow$$

$$\log_2 \frac{x-3}{x^2-9} + 2 = 0 \Leftrightarrow \log_2 \frac{1}{x+3} + 2 = 0 \Leftrightarrow \log_2(x+3)^{-1} + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$-\log_2(x+3) + 2 = 0 \Leftrightarrow \log_2(x+3) = 2 \Leftrightarrow \log_2(x+3) = 2 \Leftrightarrow$$

$$x+3 = 2^2 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (keine Lösung)}$$

$$2) 2,5 \cdot 2^{4x-4} \cdot 5^{x+2} = 2^{2x+1} \cdot 5^{3x-3} \quad D = \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$2,5 \cdot \frac{2^{4x}}{16} \cdot 5^x \cdot 5^2 = 2^{2x} \cdot 2 \cdot \frac{5^{3x}}{5^3} \Leftrightarrow$$

$$\frac{2,5 \cdot 5^2}{16} \cdot 2^{4x} \cdot 5^x = 2^{2x} \cdot 5^{3x} \cdot \frac{2}{5^3} \Leftrightarrow$$

$$\frac{5 \cdot 5^2 \cdot 5^3}{16 \cdot 4} = \frac{2^{2x} \cdot 5^{3x}}{2^{4x} \cdot 5^x} \Leftrightarrow \frac{5^6}{2^6} = 2^{2x-4x} \cdot 5^{3x-x} \Leftrightarrow$$

$$\frac{5^6}{2^6} = 2^{-2x} \cdot 5^{2x} \Leftrightarrow \frac{5^6}{2^6} = \frac{5^{2x}}{2^{2x}} \Leftrightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^6 = \left(\frac{5}{2}\right)^{2x} \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{5}{2}\right)^6 = \left(\frac{5}{2}\right)^{2x} \Leftrightarrow 2x = 6 \Leftrightarrow x = 3$$

$$3) \log_p \sqrt{\frac{4a^3 \cdot \sqrt{p}}{b^5 \cdot q^7}} = \log_p \left(\frac{4a^3 \cdot \sqrt{p}}{b^5 \cdot q^7} \right)^{\frac{1}{2}} = \log_p \frac{(4a^3 \cdot \sqrt{p})^{\frac{1}{2}}}{(b^5 \cdot q^7)^{\frac{1}{2}}} = \log_p \frac{(4a^3)^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{p}^{\frac{1}{2}}}{(b^5)^{\frac{1}{2}} \cdot (q^7)^{\frac{1}{2}}} =$$

$$\log_p \frac{4^{\frac{1}{2}} \cdot a^{3 \cdot \frac{1}{2}} \cdot (p^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}}{b^{5 \cdot \frac{1}{2}} \cdot q^{7 \cdot \frac{1}{2}}} = \log_p \frac{\sqrt{4} \cdot a^{\frac{3}{2}} \cdot p^{\frac{1}{4}}}{b^{\frac{5}{2}} \cdot q^{\frac{7}{2}}} = \log_p \frac{2 \cdot a^{\frac{3}{2}} \cdot p^{\frac{1}{4}}}{b^{\frac{5}{2}} \cdot q^{\frac{7}{2}}} =$$

$$\log_p (2 \cdot a^{\frac{3}{2}} \cdot p^{\frac{1}{4}}) - \log_p (b^{\frac{5}{2}} \cdot q^{\frac{7}{2}}) = \log_p 2 + \log_p a^{\frac{3}{2}} + \log_p p^{\frac{1}{4}} - \log_p b^{\frac{5}{2}} - \log_p q^{\frac{7}{2}} =$$

$$\log_p 2 + \frac{3}{2} \log_p a + \frac{1}{4} - \frac{5}{2} \log_p b - \frac{7}{2} \log_p q$$

2. Lösung:

$$B6) \log_p \sqrt{\frac{4a^3 \cdot \sqrt{p}}{b^5 \cdot q^7}} = \log_p \left(\frac{4a^3 \cdot \sqrt{p}}{b^5 \cdot q^7} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_p \frac{4a^3 \cdot \sqrt{p}}{b^5 \cdot q^7} =$$

$$\frac{1}{2} (\log_p (4a^3 \cdot \sqrt{p}) - \log_p (b^5 \cdot q^7)) = \frac{1}{2} (\log_p (4a^3) + \log_p \sqrt{p} - \log_p b^5 - \log_p q^7) =$$

$$\frac{1}{2} \left(\log_p 4 + \log_p a^3 + \log_p p^{\frac{1}{2}} - 5 \log_p b - 7 \log_p q \right) =$$

$$\frac{1}{2} \log_p 4 + \frac{1}{2} \log_p a^3 + \frac{1}{2} \log_p p^{\frac{1}{2}} - \frac{5}{2} \log_p b - \frac{7}{2} \log_p q =$$

$$\frac{1}{2} \log_p 2^2 + \frac{3}{2} \log_p a + \frac{1}{2} \log_p p^{\frac{1}{2}} - \frac{5}{2} \log_p b - \frac{7}{2} \log_p q$$

$$\log_p 2 + \frac{3}{2} \log_p a + \frac{1}{4} - \frac{5}{2} \log_p b - \frac{7}{2} \log_p q$$

Name, Vorname:

Hilfsmittel:
Taschenrechner

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punktabzug !!!!

1) 10P
In Abhängigkeit der Zeit gilt für den Spannungsverlauf beim Aufladen eines Kondensators:

$$U = U_0 \cdot (1 - e^{-\frac{t}{RC}}); \text{ wobei } U_0 \neq 0, R \neq 0, C \neq 0$$

Formen Sie diese Gleichung nach t um.

2) 10P
Wie hoch muss der Jahreszinssatz sein, damit sich ein Kapital in 10 Jahren verdoppelt?

3) 10P
Die Grundmenge ist $G = \mathbb{R}$.
Bestimmen Sie die Definitionsmenge D und rechnerisch die Lösungsmenge L der Gleichung
 $9 \cdot 3^{2x} = 3^{x+1}$

4) 10P
Vom Punkt $P(1 \mid 0)$ wird die Tangente an das Schaubild der Funktion mit der Funktionsgleichung $h(x) = e^{0,5x}$ gelegt.
a) Berechnen Sie den Berührungspunkt.
b) Geben Sie die Gleichung der Tangente an.

5) 10P
Berechnen Sie den exakten Flächeninhalt der Fläche, die durch die Kurven mit den Funktionsgleichungen $x = 0$, $x = 3$, $f(x) = e^{0,5x}$ und $h(x) = \frac{1}{2}e^{1,5x} - \frac{1}{2}e^{1,5}$ begrenzt wird.

Lösungen:

1)

$$U(t) = U_0 \cdot (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \quad | : U_0$$

$$1 - e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{U}{U_0} \quad | -1$$

$$-e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{U}{U_0} - 1 \quad | \cdot (-1)$$

$$e^{-\frac{t}{RC}} = -\frac{U}{U_0} + 1$$

$$-\frac{t}{RC} = \log_e \left(-\frac{U}{U_0} + 1 \right) = \ln \left(1 - \frac{U}{U_0} \right)$$

$$t = -RC \cdot \ln \left(1 - \frac{U}{U_0} \right)$$

2)

$$K_{10} = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p_1}{100} \right)^{10}$$

$$K_{10} = 2 \cdot K_0$$

also:

$$2K_0 = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p_1}{100} \right)^{10} \Leftrightarrow \left(1 + \frac{p_1}{100} \right)^{10} = 2 \Leftrightarrow 1 + \frac{p_1}{100} = \sqrt[10]{2} \Leftrightarrow p_1 = (\sqrt[10]{2} - 1) \cdot 100$$

$$p_1 \approx 7,17 \%$$

3)

$$A4) \quad 9 \cdot 3^{2x} = 3^{x+1} \quad D = \mathbb{R}$$

1. Lösung :

$$9 = \frac{3^{x+1}}{3^{2x}} \Leftrightarrow 9 = 3^{x+1-2x} \Leftrightarrow 9 = 3^{-x+1} \Leftrightarrow$$

$$-x+1 = \log_3 9 \Leftrightarrow x = 1 - \log_3 9 \Leftrightarrow$$

$$x = 1 - 2 \Leftrightarrow x = -1$$

2. Lösung :

$$\ln(9 \cdot 3^{2x}) = \ln(3^{x+1}) \Leftrightarrow \ln 9 + \ln 3^{2x} = (x+1) \ln 3 \Leftrightarrow$$

$$\ln 9 + 2x \ln 3 = x \ln 3 + \ln 3 \Leftrightarrow x \ln 3 = \ln 3 - \ln 9 \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{\ln 3 - \ln 9}{\ln 3} \Leftrightarrow x = \frac{\ln(1/3)}{\ln 3} = \frac{\ln 3^{-1}}{\ln 3} = \frac{-1 \cdot \ln 3}{\ln 3} \Leftrightarrow$$

$$x = -1$$

4) Der gesuchte Berührungspunkt sei $B(x_B, y_B)$.

Die ZPF der Geradengleichung ergibt die sogenannte Tangentenbedingung:

$$\frac{h(x_B) - 0}{x_B - 1} = h'(x_B) \quad (\text{TB})$$

Es gilt aber:

$$h(x_B) = x_B \text{ und } h'(x_B) = \frac{1}{2} e^{0,5x_B}$$

Setze dies in (TB) ein. Das ergibt dann:

$$\frac{e^{0,5x_B} - 0}{x_B - 1} = \frac{1}{2} e^{0,5x_B}$$

$$\frac{2e^{0,5x_B}}{x_B - 1} = e^{0,5x_B}$$

$$2e^{0,5x_B} = x_B e^{0,5x_B} - e^{0,5x_B}$$

$$2e^{0,5x_B} = e^{0,5x_B} (x_B - 1) \quad | : e^{0,5x_B}$$

$$2 = x_B - 1$$

$$x_B = 3$$

$$y_B = h(3) = e^{1,5}, \text{ also } B(3 | e^{1,5})$$

PSF:

$$\frac{y - 0}{x - 1} = \frac{1}{2} e^{0,5 \cdot 3} \iff y = \frac{1}{2} e^{1,5} x - \frac{1}{2} e^{1,5}$$

5)

$$A = \int_0^3 (\text{Oberkurve} - \text{Unterkurve}) dx =$$

$$\int_0^3 (e^{0,5x} - (\frac{1}{2} e^{1,5} x - \frac{1}{2} e^{1,5})) dx = \int_0^3 (e^{0,5x} - \frac{1}{2} e^{1,5} x + \frac{1}{2} e^{1,5}) dx =$$

$$\left[2e^{0,5x} - \frac{1}{4} e^{1,5} x^2 + \frac{1}{2} e^{1,5} x \right]_0^3 = 2e^{0,5 \cdot 3} - \frac{1}{4} e^{1,5} \cdot 3^2 + \frac{1}{2} e^{1,5} \cdot 3 - \left(2e^{0,5 \cdot 0} - \frac{1}{4} e^{1,5} \cdot 0^2 + \frac{1}{2} e^{1,5} \cdot 0 \right) =$$

$$2e^{1,5} - \frac{9}{4} e^{1,5} + \frac{3}{2} e^{1,5} - 2 = \frac{5}{4} e^{1,5} - 2 \approx 3,6$$

KLAUSUR 5 Mathematik 2BK11 Nachtermin Zeit: 45 Minuten

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punktabzug !!!!

AUFGABEN

1) 20P

Die Funktion f ist vom Typ

$$f(x) = e^{ax} + b, \quad x \in \mathbb{R} \text{ und } a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R}$$

Untersuchen Sie, ob es eine Funktion dieses Typs mit jeweils folgenden Eigenschaften gibt:

- der Punkt $P(0 | 3)$ liegt auf dem Schaubild von f und es gilt $f'(0) = \frac{1}{2}$
- Das Schaubild von f geht durch die Punkte $A(-2 | 4)$ und $B(1 | 4)$.
- Das Schaubild von f verläuft ganz im ersten Quadranten.

2) 30P

Gegeben ist die Funktion f mit:

$$f(x) = e^{-\frac{1}{2}x} - 3, \quad x \in \mathbb{R}$$

Das Schaubild von f ist K .

- Bestimmen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von K mit den Koordinatenachsen.
- Zeigen Sie, dass K keine Hoch-, Tief- oder Wendepunkte besitzt.
- Ist das Schaubild von f rechts- oder linksgekrümmt? Begründen Sie Ihre Antwort durch ein rechnerisches Argument.

Lösungen:

1) a)

$$f'(x) = ae^{ax}$$

$P(0 | 3) \in K_f$:

$$3 = e^{a \cdot 0} + b \iff 3 = e^0 + b \iff 3 = 1 + b \iff b = 2$$

$$f'(0) = \frac{1}{2}:$$

$$0,5 = f'(0) = ae^{a \cdot 0} \iff \frac{1}{2} = ae^{a \cdot 0} \iff \frac{1}{2} = ae^0 \iff a = 0,5$$

$$\text{also: } f(x) = e^{\frac{1}{2}x} + 2$$

b) $A(-2 | 4) \in K_f$:

$$4 = e^{a \cdot (-2)} + b \iff 4 = e^{-2a} + b \iff b = 4 - e^{-2a}$$

$B(1 | 4) \in K_f$:

$$4 = e^{a \cdot 1} + b \iff 4 = e^a + b \iff b = 4 - e^a$$

$$\text{also: } 4 - e^{-2a} = 4 - e^a \quad | -4$$

$$-e^{-2a} = -e^a \quad | \cdot (-1)$$

$$e^{-2a} = e^a \quad | : e^a$$

$$\frac{e^{-2a}}{e^a} = 1 \iff e^{-2a-a} = 1 \iff e^{-3a} = 1 \iff -3a = \ln 1 \iff -3a = 0 \iff a = 0$$

Laut Voraussetzung ist aber $a \neq 0$

c) Die Definitionsmenge der Funktion $f'(x) = ae^{ax}$ ist die Menge der reellen Zahlen, also kann das Schaubild nicht im 1. Quadranten verlaufen.

2) a) Schnittpunkte mit der x-Achse

a1) Schnittpunkte $S_x(x_s | 0)$ mit der x-Achse: $S_x(x_s | 0) \in K_f$

$$0 = e^{\frac{1}{2}x_s} - 3$$

$$\iff e^{\frac{1}{2}x_s} = 3 \iff -\frac{1}{2}x_s = \ln 3 \iff x_s = -2 \ln 3$$

a2) Schnittpunkte mit der y-Achse

Schnittpunkte $S_y(0 | y_s)$ mit der y-Achse: $S_y(0 | y_s) \in K_f$

$$y_s = e^{\frac{1}{2} \cdot 0} - 3 = 1 - 3 = -2$$

also:

$$S_y(0 | -2)$$

b)

b1) Extrempunkte

$$f'(x) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}$$

Extrempunkte $E(x_e | y_e)$: $f'(x_e) = 0$

$$0 = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x_e}$$

$$\iff 0 = e^{-\frac{1}{2}x_e} \iff L = \emptyset$$

b2) Wendepunkte:

$$f''(x) = \frac{1}{4} e^{-\frac{1}{2}x}$$

Wendepunkte $W(x_w|y_w)$: $h''(x_w) = 0$

$$0 = \frac{1}{4} e^{-\frac{1}{2}x_w} \iff 0 = e^{-\frac{1}{2}x_w} \iff L = \emptyset$$

c)

Da $e^{-\frac{1}{2}x} > 0$ und $\frac{1}{4} > 0$, gilt $f''(x) = \frac{1}{4} e^{-\frac{1}{2}x} > 0$. Damit ist Kf linksgekrümmt.

Name, Vorname:

Hilfsmittel:

keine

Hinweise (unbedingt beachten):

- Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.
- Ergebnisse unterstreichen.
- Vollständigen Rechengang angeben.
- Terme bzw. Mengenterme vereinfachen wie z.B: $3t$ statt $2t+t$ und M statt $M\setminus\{\}$
- Genaues Ergebnis (also z.B: $1/3$ nicht $0,333$) angeben.
- Der Name und Vorname muß auf jedes Aufgabenblatt und auf jedes Lösungsblatt geschrieben werden.
- Die Lösungsblätter müssen in folgender Form durchnummeriert werden. Beispiel: $1/4$ $2/4$ $3/4$ $4/4$
- Die Aufgabennummer muß im Lösungsblatt vor jeder gelösten Aufgabe stehen.
- Die rote Farbe darf nicht benutzt werden.
- Aufgabenblätter bitte auch abgeben.
- Lassen Sie bitte auf der linken Seite einen mindestens 3cm breiten Rand.
- Lösungen und Aufzeichnungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet!!
- Austausch JEGLICHER Mittel (auch Schreibstifte, Radierer, usw.) und Informationen zwischen Schülern ist nicht erlaubt.
- Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise gibt es einen Punktabzug !!!!

AUFGABEN1) 10PFür welche Winkel x zwischen -2π und 3π gilt: (Probe machen)

$$\sin x = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

$$\text{Bemerkung: } \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

2) 10P

a) Berechnen Sie mathematisch:

$$\int_0^{2\pi} \sin(x) dx =$$

b) Begründen Sie das Ergebnis verbal

3) 15P

Welche des folgenden Aussagen gelten (mathematisch begründen)?

a) $\cos x = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

b) $\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

c) $\sin(x - x_0) = -\sin(x_0 - x)$

4) 5PBilden Sie die 1. Ableitung von $h(x)$.

$$h(x) = 4 \sin(5x-6) + 7$$

5) 12PBestimmen Sie A , p , y_0 , $x_{\min R}$, $x_{\min L}$ der Kurve K_f mit der Funktionsgleichung:

$$f(x) = -4 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}(x - 13\pi)\right) - 9$$

Lösung:

1)

$$\text{c) } x_1 = 15^\circ, \quad x_2 = 180^\circ - 15^\circ = 165^\circ, \quad x_3 = 360^\circ + 15^\circ = 375^\circ, \quad x_4 = 540^\circ - 15^\circ = 525^\circ \\ x_5 = -180^\circ - 15^\circ = -195^\circ, \quad x_6 = -360^\circ + 15^\circ = -345^\circ,$$

2)

$$\text{a) } \int_0^{2\pi} \sin(x) dx = [-\cos(x)]_0^{2\pi} = -\cos(2\pi) - (-\cos(0)) = -\cos(2\pi) + \cos(0) = -1 + 1 = 0$$

3)

$$\text{a) } \cos 0 = \sin(-\pi/2) \quad \text{c) } \sin(x - x_0) = \sin(-(x_0 - x)) = -\sin(x_0 - x)$$

$$1 = -1 \text{ falsch}$$

$$\text{b) } \sin \pi/2 = \cos(\pi)$$

$$1 = -1 \text{ falsch}$$

4)

$$h'(x) = 20 \cos(5x-6)$$

5)

$$A = |-4| = 4 \quad p = \frac{2\pi}{1/2} = 4\pi \quad y_0 = -9$$

$$f(x) = -4 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}(x - 13\pi)\right) - 9 = -4 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}(x + 12\pi - 13\pi)\right) - 9 = -4 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}(x - \pi)\right) - 9$$

$$= -4 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}(x + 4\pi - \pi)\right) - 9 = -4 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}(x + 3\pi)\right) - 9$$

$$x_{\min R} = \pi$$

$$x_{\min L} = 3\pi$$